T 24768

... 2022

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XV.

—

ANUL 1935—1936.

BIBLIOT[illegible]STRA"

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMÂNEASCĂ"
1936.

I 24768

ANUL XV. 15 MARTIE 1935 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. THÉBAULT: SUR LES BISSECTRICES DU TRIANGLE
2. N. O. ZAHARIA: DOMENIUL MATEMATICILOR IN CLASIFICAREA LUI AUGUSTE COMTE. (URMARE)
3. NOTE MATEMATICE: 1, 2.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 319, 1184, 1190, 1255.
6. PROBLEME PROPUSE: 1369–1376.
7. INFORMATIUNI.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

2462.

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broșate, 120 lei fiecare.

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMIŞOARA,

APARE SUB CONDUCEREA UNUI COMITET COMPUS DIN:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Profesor şi Sub-Director la Şc. Politechnică din Bucureşti, Mateiu Voevod 25, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogălniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării, la Şc.Polit.,Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor Inginer, Profesor de Electrotechnică, la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie.
13. **Balazs D.** Inginer, Asistent la Şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
14. **Bănărescu M.** Inginer la Atelierele C F. R., Profesor la Şc. Politechnică, din Timişoara, str. Doja 51.
15. **Banciu I.** Prof., Directorul „Casei de Depuneri", str. Lucaci 95, Bucureşti.
16. **Bărglăzan A.** Inginer, Conferenţiar şi Asistent pe lângă catedra de Hidraulică.
17. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică, Şc. Politechnică, Timişoara.
18. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Profesor la Şc. Politechnică din Timişoara.
19. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
20. **Botea N. G.** Licentiat in Matematici, Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti, Calea Floreasca 46, Bucureşti 3.
21. **Botez M.** Doctor în Matematici, Directorul şcoalei superioare de Comerţ din Piatra-Neamţ.
22. **Botez M.** Profesor la Şc. Normală şi liceul Milit., str. Speranţei 12, Iaşi.
23. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
24. **Breazu D.** Profesor de liceu, în Bucureşti.
25. **Buicliu Gh.** Colonel de brigadă, din Artilerie. Fost 10 ani profesor de Geometria Analitică la Şcoala Politecnică din Timişoara, Directorul Direcţiei Chimice Militare, Str. Dr. Lister 5, Bucureşti 6.
26. **Călniceanu C.** Inginer, Conferenţiar, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini.
27. **Cândea C.** Doctor-inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie, la Şc. Politechnică din Timişoara.
28. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice.
29. **Claudian Virgil** Licenţiat în matematici, profesor la Şcoala Normală din Galaţi.
30. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba Engleză.
31. **Coman A.** Profesor Lic. C. Diaconovici-Loga Profesor onorofic la Şc. Politechnică, Preşedintele Comisiei Interimare, str. Feldioara 1, Timişoara.
32. **Comănescu A.** Licenţiat în matematici, profesor la liceul „Sft. Haralambie" din T-Măgurele.
33. **Constantinescu G. G.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul „D. A. Sturza" Tecuci, Str. Nicoreşti 37.
34. **Constantinescu Gh.** Profesor, lic. Lazăr, Bucureşti.
35. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralog e şi Petrografie.
36. **Costăchescu D. C.** Sub-Lt de Marină, Constanţa.
37. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
38. **Cristodulo N** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
39. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice.
40. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Prof. la Universitatea din Cluj.
41. **Diaconescu N.** Profesor, lic. din Slatina.
42. **Dumitriu-Dada** Profesor, lic. Craiova.
43. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
44. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, Şc. Politechnică Timişoara.
45. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
46. **Ghermănescu M.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Şcoala Politechnică, Timişoara.
47. **Ghiţescu Spiridon** Profesor secundar, Mizil.
48. **Hristea H.** Inginer la dep. C. F. R.
49. **Ionescu C-tin Bujor** Licenţiat în Matematici, Profesor. Parcul Iancului, Str. Maior Popescu Gh. 26, Bucureşti.
50. **Iorgulescu T.** Licenţiat in Ştiinţe, Asistent pe lângă catedra de Geologie.
51. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică. Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială.
52. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor de Geologia Zăcămintelor.

53. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.
54. **Linteş I.** Maior de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.
55. **Liteanu Gh.** Colonel în Artilerie, Str. L. Carageale 30 A, Bucureşti
56. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică.
57. **Magheru I.** Doctor în Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
58. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, str. Paul Chinezul 7, Timişoara.
59. **Mardan D.** Inginer inspector general, directorul Fabricei de tutun, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.
60. **Mateescu Ş.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor de Mineralogie şi Petrografie.
61. **Mihaiu Emil** Profesor Şc. Comercială Timişoara şi Actuar Matematici Diplomat.
62. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă.
63. **Mioc V.** Profesor la Liceul Diaconovici Loga, Timişoara şi Asistent la catedra de Analiză, la Şc. Politechnică, Timişoara.
64. **Nadaşan Şt.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor.
65. **Naneş Gh.** Profesor la Lic. Sf. Sava, Bucureşti.
66. **Niculescu Gh.** Comandor, Inginer, Str. Izvor 98, Bucureşti.
67. **Niculescu Miron** Doctor în Matematici, profesor la Universitatea din Cernăuţi, str. Paris 14, Bucureşti.
68. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti.
69. **Nicolau A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, Directorul Uzinei Electrice, Craiova.
70. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
71. **Onicescu O.** Doctor în Matematici, Profesor Universitar, Clopotarii-vechi 25, Bucureşti.
72. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Prof. la Şc. Politechnică, Bucureşti.
73. **Orăşeanu Gr.** Profesor la Liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.
74. **Petrescu A.** Doctor în Metematici.
75. **Popescu E.** Doctor în Chimie dela Sorbona, Profesor la Şc. Politechnică, Bucureşti.
76. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şc. Polit., Timişoara.
77. **Protopopescu I.** Inginer-şef, Prof. la Şc. Politechnică, din Timişoara.
78. **Purcariu I.** Director General, Ministerul de Instrucţie Publică, Bucureşti.
79. **Racliş N. R.** Doctor în Ştiinţe Matematice de la Paris, Profesor Bucureşti, Directorul Institutului Matematic Român.
80. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.
81. **Sauciuc L.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
82. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar de Electrotechnică şi Aplicaţiile Electricităţii în Mine, Directorul Şc. P. T. T. din Timişoara.
83. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Prof. la Universitatea din Cluj.
84. **Severineanu C.** Inginer-şef, Subdirectorul Serviciului tracţiunei C. F. R., Prof. şi Decan la Şc. Politechnică, Timişoara.
85. **Simionescu Gh. D.** Licenţiat în Matematici, Profesor la liceul Militar „N. Filipescu", Târgovistea.
86. **Smighelschi O.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Hidraulică.
87. **Stambuleanu A.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică şi Fizică Industrială.
88. **Stan A.** Locotenent, Regimentul 31 Artilerie, Cluj.
89. **Stăncescu C** Doctor-Inginer Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
90. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Construcţii.
91. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini.
92. **Stoicescu M.** Profesor, Directorul liceului Lazăr, str. Zefirului 4, Bucureşti.
93. **Teodorescu C.** Inginer-şef, Rector al Şc. Politechnice, Timişoara.
94. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură, Cluj.
95. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.
96. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Prof. la Universitatea din Bucureşti, Preşedinte al Consiliului de Perfecţionare al Şc. Polit., Timişoara, str. Londra 44, Bucureşti.
97. **Vasiliu Leoben Gh.** Inginer-geodet. Diplomat al Şcoalei Politechnice din Leoben. Asistent la Şcoala Politechnică din Bucureşti, Str. D. No. 51. Cartierul Grand C.F.R.
98. **Vlad I. V.** Inginer-arhitect, Profesor la Şc. Politechnică, str. Train Lalescu 1, Timişoara.
99. **Zăgănescu I.** Inginer la C. F. R., Timişoara.
100. **Zapan Gr.** Lt Comandor-aviator, Inginer-diplomat al Şcolii Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice din Paris. Profesor la Şcoala Pregătitoare de Ofiţeri şi la Secţia Militară de pe lângă Şcoala Politechnică, Bucureşti, Casa „Gazetei Matematice", Calea Griviţei 158, Bucureşti 2.

ANUL XV — No 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

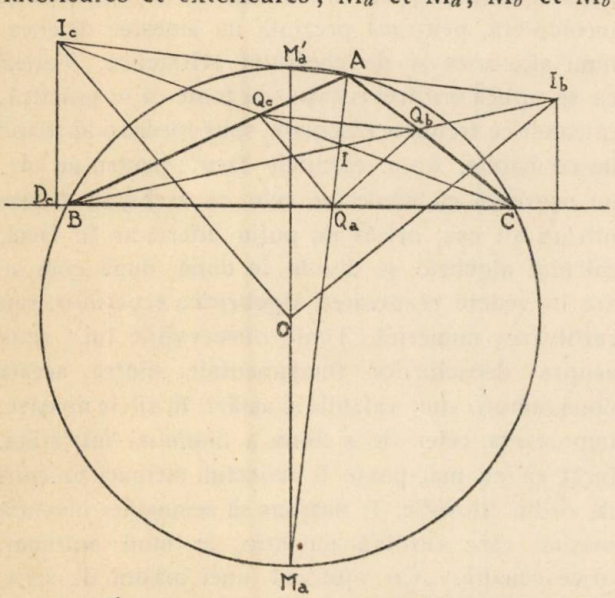
PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR LES BISSECTRICES DU TRIANGLE

PAR M V. THÉBAULT, LE MANS (FRANCE)

Notations. Soient un triangle A B C, (B C = a, C A = b, A B = c); (O) le cercle circonscrit, de rayon R; (I), (I_a), (I_b), (I_c) les cercles tritangents, de rayons r, r_a, r_b, r_c; D, E, F, $D_a, \ldots, F_c$ les contacts de ces cercles sur les côtés B C, C A, A B; Q_a, Q_b, et Q'_a, Q'_b, Q'_c les pieds des bissectrices intérieures et extérieures; M_a et M'_a, M_b et M'_b,



M_c et M'_c, les intersections du cercle (O) avec les bissectrices intérieures et extérieures des angles A, B, C; S l'aire du triangle. Posons O I = d, O I_a = d_a, O I_b = d_b, O I_c = d_c.

1. Les droites O I, O I_a, O I_b, O I_c étant respectivement perpendiculaires aux droites:[1]

$$\Delta \equiv (Q'_a, Q'_b, Q'_c), \quad \Delta_a \equiv (Q'_a, Q_b, Q_c),$$
$$\Delta_b \equiv (Q'_b, Q_c, Q_a), \quad \Delta_c \equiv (Q'_c, Q_a, Q_b),$$

[1] Propriété connue.

on a, par exemple, ces égalités d'angles:

$$X = I_b O I_c = Q_b Q_a Q_c \quad \text{ou} \quad 180^0 - Q_b Q_a Q_c$$
$$(1)\quad Y = I_c O I_a = Q_c Q_b Q_a \quad \text{ou} \quad 180^0 - Q_c Q_b Q_a$$
$$Z = I_a O I_b = Q_a Q_c Q_b \quad \text{ou} \quad 180^0 - Q_a Q_c Q_b.$$

Or, l'aire Σ_a du triangle $I_b O I_c$ a pour expression:

$$(2)\quad \Sigma_a = \frac{1}{2} D_b D_c . O M'_a = \frac{1}{2} R (b + c) = \frac{1}{2} d_b d_c \sin X.$$

Par analogie, les aires Σ_b, Σ_c des triangles $I_c O I_a$, $I_a O I_b$ s'expriment:

$$(3)\quad \Sigma_b = \frac{1}{2} R (c + a) = \frac{1}{2} d_c d_a \sin Y,$$
$$\Sigma_c = \frac{1}{2} R (a + b) = \frac{1}{2} d_a d_b \sin Z.$$

Dès lors:

$$(4)\quad \sin X = \frac{R (b + c)}{d_b d_c}, \quad \sin Y = \frac{R (c + a)}{d_c d_a},$$
$$\sin Z = \frac{R (a + b)}{d_a d_b}.$$

2. Si l'on pose:

$Q_b Q_c = x$, $Q_b Q_a = y$, $Q_a Q_c = z$, aire $Q_b Q_a Q_c = S_1$,

on a:

$$(5)\quad yz = \frac{2 S_1}{\sin X}, \quad xy = \frac{2 S_1}{\sin Y}, \quad zx = \frac{2 S_1}{\sin Z},$$

puis:

$$(x y z)^2 = \frac{8 S^3}{\sin X \sin Y \sin Z};$$

d'où, en vertu des relations (4) et de la formule:

$$(6)\quad S_1 = \frac{2 a b c S}{(b + c)(c + a)(a + b)},$$

due à *Dostor*[2], puis après rèductions:

[1] *Journal de Gr. de Longchamps*, 1880 p. 20.

$$yz = \frac{16\, d_b\, d_c}{(b+c)^2\,(c+a)\,(a+b)}\, S^2$$

$$(7) \qquad zx = \frac{16\, d_c\, d_a}{(b+c)\,(c+a)^2\,(a+b)}\, S^2$$

$$xy = \frac{16\, d_a\, d_b}{(b+c)\,(c+a)\,(a+b)^2}\, S^2$$

$$(8) \qquad xyz = \frac{64\, d_a\, d_b\, d_c}{(b+c)^2\,(c+a)^2\,(a+b)^2}\, S^3.$$

De ces relations on tire finalement les suivantes :

$$Q_b\,Q_c = \frac{4\, d_a}{(c+a)(a+b)}\, S, \quad Q_b\,Q_a = \frac{4\, d_c}{(b+c)(c+a)}\, S,$$

$$(9) \qquad Q_a\,Q_c = \frac{4\, d_b}{(a+b)\,(b+c)}\, S,$$

que nous avons récemment obtenues d'une autre manière.[1]

N. B. Des expressions analogues concernent les triangles ayant pour sommets le pied d'une bissectrice intérieure et les pieds des bissectrices extérieures des deux autres sommets.

3. Lorsque le triangle $Q_b\,Q_a\,Q_c$ est *rectangle* en Q_a, par exemple, le triangle $I_b\,O\,I_c$ est *rectangle* en O, et on a :

$$R = O\,M'_a = \frac{1}{2}\, I_b\, I_c = 2\,R \cos\frac{A}{2}\ ;$$

d'où :

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \qquad A = 120^0.$$

Réciproquement d'ailleurs, si l'angle A d'un triangle ABC vaut 120° :

$$I_b\, I_c = 4\,R \cos\frac{A}{2} = 2\,R = 2\,O\,M'_a,$$

et le triangle $I_b\,O\,I_c$ est rectangle en O, de même que le triangle $Q_b\,Q_a\,Q_c$ est rectangle en Q_a.

Par suite, *la condition nécessaire et suffisante pour que le triangle ayant pour sommets les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle* ABC *soit rectangle, est que l'un des angles du triangle fondamental égale* 120°.

N. B. Dans ce triangle spécial :

$$r_b + r_c = 4\,R \cos^2\frac{A}{2} = R = \frac{1}{2}\, I_b\, I_c\ ;\ r_a - r = 3\,R.$$

[1] *Société scientifique de Bruxelles*, session d'Octobre 1934.

Le cercle décrit sur $Q_b\,Q_c$ *comme diamètre passe au point de Feuerbach du triangle* ABC.

Ces propriétés s'ajoutent à celles contenues dans la *Bibliographie des triangles spéciaux* de *J. Neuberg*.[1]

DOMENIUL MATEMATICILOR IN CLASIFICAREA LUI AUGUSTE COMTE

de N. O. ZAHARIA

(urmare)

Imperfecţia[2] algebrei sau mai bine, imposibilitatea aplicării generale a metodei rezolvării ecuaţiilor cu ajutorul formulelor explicite, a făcut să se nască un studiu accesoriu, acela al rezolvării *numerice*, care caută nu o formulă generală, ci *valoarea* particulară a fiecărei necunoscute, pentru valori particulare ale celorlalte elemente din ecuaţie. Acestei teorii, *Comte* îi dă numele de bastardă şi incompletă, pentrucă prezintă un amestec de chestiuni algebrice şi de chestiuni aritmetice. Totuşi ea se aplică oricărei ecuaţii, cu toate că în practică, calculele ce trebuesc efectuate, sunt adeseori aproape inexecutabile. Apoi, calculele făcute pentru un caz, nu uşurează cu nimic pe cele ce trebuesc făcute într'un alt caz, oricât de puţin diferit ar fi. Deci, calculul algebric se divide în două, după cum se are în vedere rezolvarea algebrică a ecuaţiilor, sau rezolvarea numerică. Toate observaţiile lui *Comte* asupra deosebirilor fundamentale dintre aceste două ramuri, sunt valabile şi astăzi. In zilele noastre, importanţa celei de a doua a diminuat într'atâta, încât ea nu mai poate fi obiectul niciunei preţuiri de ordin filosofic. E deajuns să semnalăm invenţia maşinii care rezolvă numeric, în mod automat, orice ecuaţie. „Cu ajutorul unei maşini de scris, se scrie ecuaţia dată ; maşina întră în funcţiune, zeci de rotiţe se învârtesc până când se găseşte rezultatul. O sonerie anunţă că lucrarea a luat sfârşit . . .“[3] Deci rezolvarea numerică a ecuaţiilor „. . . nu face parte ca element integrant din *gândirea* matematică“[4]. Ca o a treia ramură, care le

[1] *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*, 1925, p. 24.

[2] E termenul întrebuinţat de *A. Comte*.

[3] *P. Sergescu*, Gândirea matematică, p. 82.

[4] Idem.

domină pe cele două despre cari s'a vorbit mai sus, *Comte* plasează *teoria ecuațiilor*, pur speculativă, care trebue să servească și de bază rațională rezolvării numerice.

Capitolul algebrei propriu zise este încheiat printr'o discuție generală asupra noțiunilor de număr imaginar, negativ sau pozitiv și principiului omogenității, — asupra cărora nu insistăm aci.

Rămâne, pentru a complecta prima mare diviziune, a matematicilor abstracte, să abordăm cea de a doua ramură a *calculului funcțiunilor: analiza infinitezimală.* Dacă vom avea în vedere faptul, că dela apariția *Cursului de filosofie pozitivă* au trecut până astăzi, o sută de ani, ne va apărea naturală discuția pe care *Comte* o simte necesară, asupra fundamentelor calculului infinitezimal. Adică, asupra noțiunii de infinit mic și justificarea ei logică. Astăzi studiul acesta, în orice tratat, este expres numai în chip dogmatic. Există o singură analiză infinitezimală ca și cum ar fi fost creată în toată intinderea ei de un singur autor. Inaintea lui *Comte*, cel ce a căutat să stabilească un sens precis noului calcul, descoperit de *Newton* și *Leibnitz*, a fost *Immanuel Kant.* La rândul său, *Comte* își construește argumentația pe izvoarele inițiale, vrem să spunem operele lui *Newton* și *Leibnitz*, adăogându-le aportul matematic adus de *Lagrange* și critica filosofică a lui *Kant.* Scopul nostru fiind de a înfățișa diferitele diviziuni ale matematicilor așa cum le-a conceput *Comte,* printr'o prezentare cu caracter descriptiv, vom lăsa la o parte această chestiune, abordând direct pe aceea a obiectului și întinderii calculului infinitezimal, așa cum reese din cea de a VII-a lecție a *Cursului.*

Calculul funcțiunilor indirecte se divide în două părți: *calculul diferențial* și *calculul integral*, după numirile date de *Leibnitz*; *fluxiunilor* și *fluentelor,* după *Newton; funcțiunilor derivate* și *funcțiunilor primitive*, după *Lagrange.* Cel care este sortit să rezolve complet problemele matematice este, în ultimă instanță, desigur, calculul integral. Insă operația integrării este încă foarte anevoioasă. Și fiindcă, spune *Comte*, nu putem să integrăm imediat decât expresiile diferențiale deduse din diferențiarea funcțiunilor simple, enumerate de noi atunci când a fost vorba de algebra propriu zisă; și pentru că integrările în problemele mai grele au drept punct de plecare expresii diferențiale destul de complicate, — va fi nevoie să se institue și să se studieze mai întâi calculul diferențial. In ce privește integrarea, ea va trebui să reducă toate cazurile complicate, la acelea cari conțin diferențialele funcțiunilor simple. Teoria calculului diferențial trebue să aibă totdeauna în vedere, reducerea cât mai avansată și simplificarea ultimă posibilă a formulelor. Sunt unele probleme din acest calcul, cari rezolvă în acelaș timp și găsirea formulelor în termeni finiți, fără a se recurge la vreo integrare. *Comte* rezumă la trei cazuri problemele generale ale analizei infinitezimale:

1°. Cele ce se pot rezolva numai cu ajutorul calculului diferențial;

2°. Cele cari nu cer decât întrebuințarea calculului integral;

3°. Cele cari necesită întrebuințarea ambelor calcule.

Evident, ultimul caz este, în acelaș timp, și cel mai general și cel mai dificil.

Calculul diferențial se va impărți în două, după-cum vor fi supuse diferențierii funcțiunile *explicite* sau cele *implicite*, deci: diferențierea *formulelor* și diferențierea *ecuațiilor,* — acest din urmă caz reducându-se în definitiv tot la cel dintâi. Primul caz comportă funcții cu una sau mai multe variabile. Faptul că diferențiarea acestora din urmă se reduce, cu ajutorul unui principiu învariabil (diferențiala totală), la diferențierea funcțiilor de o singură variabilă, coroborat cu cele spuse mai sus, ne dovedește că în fond întreg acest calcul se sprijină pe diferențierea celor zece funcții simple amintite. Ceeace face din el un sistem și simplu și perfect. Ca aplicații, *Comte* notează numai trei mai importante: desvoltarea în serii; teoria generală a maximelor și minimelor; teoria limitelor funcțiilor cari prezintă nedeterminări, pentru anumite valori date variabilelor de cari depind.

Deasemenea, în calculul integral avem de considerat funcțiile explicite și cele implicite; și funcțiile de o singură variabilă sau de mai multe. Teoria cuadraturilor este baza calculului integral. Spre deosebire de ceeace se petrece în domeniul diferențialelor, chestiunea integrărilor este mult mai complicată și mai imperfectă, din cauză că

integrarea funcţiunilor compuse nu se reduce necesar la aceea funcţiunilor simple. De aceea problemele lui se vor clasa după forma funcţiilor cari sunt de integrat. *Comte* le divide în două: algebrice şi transcendente. In mod special vorbeşte de soluţiile singulare ale ecuaţiilor diferenţiale şi despre integralele definite, a căror teorie are în algebră drept corespondenţă teoria rezolvării numerice a ecuaţiilor.

Explicând, în fine, însemnătatea calculului infinitezimal, *Comte* arată că deşi problema integrării, prezintând atâtea dificultăţi, este încă încomplectă, totuşi geometrii au dedus din aceste puţine noţiuni abstracte, o mulţime de chestiuni importante de geometrie, mecanică, termologie, etc. Importanţa filosofică a acestui fapt rezultă, spune el, din importanţa şi însemnătatea, necesar preponderente a cunoştinţelor *abstracte,* celei mai mici corespunzându-i o mulţime de cercetări *concrete.* Omul nu găseşte alte resurse pentru extensiunea succesivă a mijloacelor sale intelectuale, decât considerarea de *idei din ce în ce mai abstracte şi totuş pozitive.*

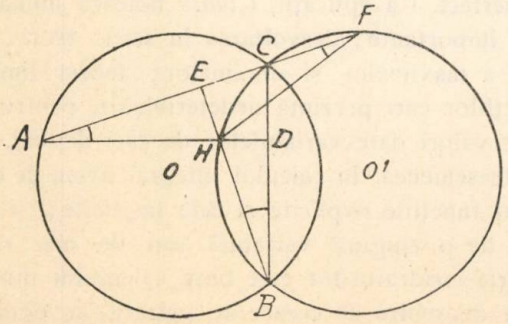
Alături de calculul infinitezimal, şi ca o complectare a mijloacelor pe cari analiza le posedă în scopul rezolvării problemelor ce i se pun, *Comte* pune *calculul variaţiilor (Lagrange)* şi *calculul cu diferenţe finite (Taylor).*

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

1. — *Reciproca unei teoreme de geometrie.*

Se ştie că dacă H este ortocentrul unui triunghiu A B C, cercul B H C este egal cu cercul A B C.



Nu cunosc demonstraţia reciprocei acestei teoreme, pe care o enunţ astfel: *Fie* B C *coarda comună a două cercuri* O, O' *şi* A *un punct mobil pe* O. *Perpendiculara din* A *pe* B C *taie cercul* O' *în* H, *care este ortocentrul triunghiului* A B C, *când* H *e de aceiaşi parte a lui* B C *cu* A.

Fie D' a doua intersecţie a lui A D cu cercul O. Cercurile O, O' fiind egale, arcele C H, C D' sunt egale şi deci:

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle HFC.$$

Dar în cercul O':

$$\sphericalangle HFC = \sphericalangle HBC,$$

de unde:

$$\sphericalangle DAC = \sphericalangle EBD,$$

deci A E D B e inscriptibil şi cum $\sphericalangle ADB$ este drept şi $\sphericalangle AEB$ va fi drept, ceia ce demonstrează teorema.

COL. GH. BUICLIU

2. — *Câteva identităţi trigonometrice.*

Următoarele identităţi stabilite în „R. M. T." an. XIII, pag. 87, 100 şi 127 de către D-l *V. Thébault*:

$$\sum \frac{a}{r_a} = \frac{2}{p}(4R+r); \qquad \sum a\,r_a = 2p(2R-r);$$

$$\sum \frac{a^2}{p-a} = \frac{4p}{r}(R-r); \qquad \sum a^2(p-a) = 4pr(R+r);$$

$$\sum \frac{a^2}{r_a} = 4(R+r);$$

devin, ţinând seama de formulele cunoscute într'un triunghiu:

$$a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2};$$

$$r_a = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{c}{2}\cdots:$$

(1) $$\sum \cos^2\frac{A}{2} = 2 + \frac{r}{2R},$$ identitate cunoscută

$$\sum \frac{\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{2}{p}(4R+r)$$

(2) $$\sum \sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R},$$ identitate cunoscută

$$\sum r_a \sin A = \frac{p}{r}(2R-r)$$

$$(3)\quad \sum \sin A \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{p}{2R^2}(R - r)$$

$$\sum \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{4}{p}(R - r)$$

$$(4)\quad \sum \sin A \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p}{2R^2}(R + r)$$

$$\sum \frac{\sin A}{\cos^2 \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}} = \frac{8}{p}(R + r)$$

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} \sec^2 \frac{B}{2} \sec^2 \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{4r}{p}(R + r)$$

$$(5)\quad \sum \frac{\sin A \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{2}{R}(R + r)$$

I. M PREDOESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XL, No. 6, Februarie 1935. Inaugurarea casei „Gazeta Matematică", de *A. D. Bunescu*. Cuvântarea S. S. Preotului *C. Moise*. Cuvântarea d-lui Profesor *Ion Ionescu*. Cuvântarea d-lui Colonel *Gh. Buicliu*. Cuvântarea d-lui Profesor *Gh. Ţiţeica*. Contract de Vânzare-Cumpărare între „G. M." şi „S. T. B." Concursul „Gazetei Matematice".

Cu prilejul înaugurării casei „Gazeta Matematică", exprimăm din partea „R. M. T." călduroase şi sincere urări de prosperitate şi mulţumire sufletească, întemeietorilor şi membrilor „G. M.", care cu atâta dragoste de Ştiinţă şi de Ţară, răspândesc în tot cuprinsul Ei, începând încă de acum 50 de ani, razele binefăcătoare ale ştiinţelor matematice. Le păstrăm trainice sentimente de adâncă recunoştinţă şi admiraţie. Trimetem colecţia întreagă a „R. M. T." (exceptând vol. I. epuizat), *pentru biblioteca „G. M"*.

2. *Boletin Matematico*, anul VII, No. 9, Noembrie 1934, Buenos-Aires. Figura polară armonică a unui punct relativ la o conică sau la o cuadrică, de *B. I. Baidaff*. (Acest articol a fost publicat întâi în „R. M. T.", anul XIV, No. 9, tot de d-l *B. I. Baidaff* şi tradus în limba spaniolă.) Determinarea maximului sau minimului funcţiunei:

$$z = x^x y^y \ldots s^s (n - x - y - \cdots - s)^{n-x-y-\cdots-s}$$

de *B. I. Baidaff*. (Acest articol interesant, îl recomandăm corespondenţilor nostri.) Cinci valori interesante a unei medii generale, de *B. I. Baidaff* şi *I. Barral Souto*.

3. *Ştiinţă şi Progres*, Revista ştiinţifică a liceelor militare, an. I, No. 10, Martie 1935. Despre problema alergătorului, de *G. Călugăreanu*. Evoluţia pământului, după concepţia lui *John Jolly*, de Prof. *C Cojocaru*. Somnul. (după *Kahn:* „Das Leben des Menschen), de Prof. *S. Iliuţ*. Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Traian Lalescu*. Culegere de Probleme de geometrie descriptivă. (Ediţia 2-a, revăzută de Dr. *R. N. Racliş*).

5. *Revista cercului de Studii al Şcoalei Superioare P. T. T., Timişoara*, anul IV, No. 2, Februarie. *Guglielmo Marconi*, de *Eugen Irimia*. Principiile răspunderii pentru mandatele postale şi buletinele de vărsământ-cec., de Dr. *K. S.* Detaliile constructive ale oficiului postal pe automobil, de *C. Ionescu*. Pagina matematică.

6. *M. Ghermanesco*. Sur les moyennes succesives des fonctions. (Extrait du Bulletin de la Société mathématique de France, T. LXII, 1935.)

7. *M. Ghermanesco*. Sur l'équation $\Delta u = \lambda u$. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'école Politéchnique de Timişoară. T. 5, fasc. 3—4.)

PROBLEME REZOLVATE

319. — *Să se găsiască patratele perfecte de cinci cifre de forma a b c a b precum şi pe acelea de forma a b c b a.*

COL. GH. BUICLIU

I. *Patratele de forma a b c a b.* Dacă z^2 este numărul căutat atunci:

$$(1)\quad z^2 = ab \times 1001 + c \times 100 = 7 \times 11 \times 13 \times ab + 100 \times c.$$

Se găseşte uşor că resturile împărţirei unui număr z şi a patratului său z^2 prin 7, sunt cele înscrise în tabelul (A) următor, în care în coloana întâi sunt înscrise z, z^2, iar în celelalte coloane resturile corespunzătoare:

(A)

z \ r	0	1	2	3	4	5	6
z^2 \ r_1	0	1	4	2	2	4	1

Acest tabel se citeşte astfel: dacă $z = mult.\ 7 + 3$ de exemplu, atunci $z^2 = mult.\ 7 + 2$ şi reciproc.

Construim la fel următoarele tablouri (B) şi (C) pentru divizorii 11 şi 13:

(B)

z \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z^2 \ r_1	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

(C)

z \ r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
z^2 \ r_1	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

Acestea fiind stabilite, să reluăm ecuaţia (1) pe care o scriem sub forma:

$$(2)\quad z^2 = 7m + 2c,$$

faţă de divizorul 7. Dăm lui c toate valorile de de la 0 la 9 şi căutăm resturile lui $2c$ prin 7. Găsim tabelul (a) în care r_1 sunt valorile acelui rest, pentru valorile corespunzătoare ale lui c din prima linie:

(*a*)

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	0	2	4	6	1	3	5	0	2	4

Comparând acest tabel cu (A) se vede că r din (*a*) nu poate fi 6, 3 sau 5 şi deci c în (2) sau (1) *nu poate fi nici una din valorile 3, 5 sau 6.*

Procedăm la fel faţă de divizorul 11, scriind pe (1) sub forma:

(3) $$z^2 = 11\,m + c$$

şi construind tabelul (*b*), care dă resturile lui c prin 11, pentru toate valorile posibile ale lui c:

(*b*)

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Comparând acest tabel cu (B), se vede că r şi deci c *nu poate avea nici una din valorile 2, 6, 7 sau 8.*

In fine faţă de divizorul 13 avem:

$$z^2 = 13\,m + 9\,c,$$

şi construind tabelul care dă resturile diviziunei lui $9c$ prin 13:

(*c*)

c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	0	9	5	1	10	6	2	11	7	3

se vede prin comparaţie cu (C), că r nu poate fi 5, 6, 2, 11, 7 şi deci c *nu poate fi nici una din cifrele* 2, 5, 6, 7, 8.

Eliminând valorile care se exclud pentru c, rezultă că c *va fi una din cifrele* 0, 1, 4 *sau* 9.

Dăm deci lui c în (1) pe rând, valorile 0, 1, 4, 9 după ce observăm că:

$$100 \leqq z < 317.$$

Pentru $c = 0$, (1) devine:

$$z^2 = 7 \times 11 \times 13 \times ab,$$

care arată că ab trebue să conţină toţi factorii primi 7, 11, 13 ceia ce nu se poate, ab fiind numai de 2 cifre.

Pentru $c = 1$, egalitatea (1) devine:

$$z^2 = 1001 \times ab + 100 = 7\,u' + 2 = 11\,v' + 1 = 13\,w' + 9,$$

ceia ce faţă de tablourile (A), (B), (C) necesită:

$$z = 7\,u \pm 3 = 11\,v \pm 1 = 13\,w \pm 3,$$

şi problema revine la a rezolva în numere întregi următoarele 8 sisteme de ecuaţiuni:

$$z = 7\,u \pm 3 = 11\,v \pm 1 = 13\,w \pm 3.$$

Se găseşte uşor că numărul z dat de aceste ecuaţiuni, este de una din formele:

$$z_{1,2} = 1001\,t \pm 276; \qquad z_{3,4} = 1001\,t \pm 10;$$

$$z_{5,6} = 1001\,t \pm 452; \qquad z_{7,8} = 1001\,t \pm 263,$$

în care t este un întreg oare-care. De oare ce $100 \leqq z < 317$, nu se pot lua din aceste valori ale lui z de cât 276 şi 263, care ridicate la patrat dau:

$$263^2 = 69169, \qquad 276 = 76176,$$

soluţiuni care satisfac enunţul problemei.

Pentru $c = 4$ egalitatea (1) devine:

$$z^2 = 1001\,ab + 400 = 7\,u' + 1 = 11\,v' + 4 = 13\,w + 10,$$

care prin consideraţiuni analoage cazului $c = 1$, dau sistemul:

$$z = 7\,u \pm 1 = 11\,v \pm 2 = 13\,w \pm 6,$$

de unde se deduce:

$$z_{1,2} = 1001\,t \pm 20; \qquad z_{3,4} = 1001\,t \pm 542;$$

$$z_{5,6} = 1001\,t \pm 526; \qquad z_{7,8} = 1001\,t \pm 97,$$

din care nici o valoare nu este cuprinsă între 100 şi 317. Deci pentru $c = 4$ *problema nu are soluţie.*

Pentru $c = 9$ se găseşte la fel:

$$z^2 = 1001\,ab + 900 = 7\,u' + 4 = 11\,v' + 9 = 13\,w' + 3$$

$$z = 7\,u \pm 2 = 11\,v \pm 3 = 13\,w \pm 4,$$

care dă:

$$z_{1,2} = 1001\,t \pm 212; \qquad z_{3,4} = 1001\,t \pm 355;$$

$$z_{5,6} = 1001\,t \pm 30; \qquad z_{7,8} = 1001\,t \pm 173,$$

din care numai valorile 173, 212 sunt acceptabile şi dau de fapt soluţiuni căci:

$$173^2 = 29929 \qquad \text{şi} \qquad 212^2 = 44944.$$

In definitiv, prima parte a problemei admite 4 soluţiuni.

II. *Patratele de forma* $abcba$. Observăm de la început că a poate avea numai valorile 0, 1, 4, 5, 6, 9.

Dacă $a = 0$, atunci şi $b = 0$ şi problema admite soluţiunile formale:

$$10^2 = 00100; \qquad 20^2 = 00400; \qquad 30^2 = 00900.$$

Dacă $a = 5$, atunci $b = 2$, iar $c = 0$, 2 sau 6 şi se găseşte imediat, că nici unul din numerele 52025, 53225, 52625 nu este patrat perfect.

Pentru restul valorilor lui a, procedăm în felul următor. Observăm că:

$$z^2 = a\,b\,c\,b\,a = a \times 1001 + b \times 1010 + c \times 100$$
$$z^2 = 99 \times 101 \times a + 10 \times 101 \times b + 101\,c + 2\,a - c$$
$$= 101\,m + 2\,a - c.$$

Dăm lui a valorile 1, 4, 6, 9 şi pentru fie-care valoare a lui a, dăm lui c toate valorile de la 0 la 9 incluziv şi găsim rezultatele înscrise în tabelul.

a \ c / z		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$z^2 = 101\,m +$	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7
4	$z^2 = 101\,m +$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	−1
6	$z^2 = 101\,m +$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
9	$z^2 = 101\,m +$	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9

în care partea închisă în cadru cu linii duble, sunt valorile restului r al diviziunei prin 101 ale lui z^2. Ori, în nota de la pag. 374 *Gazeta Matematică* Vol. XXXVIII, d-l *Col. Gh. Buicliu* a dat resturile diviziunei prin 101 ale unui număr N, şi ale lui N^2 şi N^3. Comparând valorile lui r din acea notă, cu cele din tabelul precedent, se vede că din acest tabel trebuie eliminate valorile ± 2, ± 3, ± 7, ± 8, 10, 11, 12, 15 şi 18. Rămâne că z^2 poate avea forma:

$$z^2 = 101\,m + r,$$

in care r este una din valorile rămase. Dând lui r pe rând acele valori şi ţinând seamă de rezultatele date de d-l *Col. Gh. Buicliu* în nota citată din „G M." găsim rezultatele înscrise în următorul tabel.

Forma lui		Valorile pe care le poate avea z cuprins între 100 şi 317
z^2	z	
$101\,m - 5$	$101\,n \pm 46$	**147**, 248; **157**, 258
$101\,m - 5$	$101\,n \pm 20$	121, **221**; **182**, 283
$101\,m - 1$	$101\,n \pm 10$	111, 212, **312**; **192, 293**
$101\,m$	$101\,n$	101, 202, 303.
$101\,m + 1$	$101\,n \pm 1$	**102, 203, 304**; **100, 201, 302**
$101\,m + 4$	$101\,n \pm 2$	**103**, 204, **305**; **200, 301**
$101\,m + 5$	$101\,n \pm 45$	**146, 247**; **157**, 258
$101\,m + 6$	$101\,n \pm 39$	**140, 241**; **163, 364**
$101\,m + 9$	$101\,n \pm 3$	**104, 205, 306**; 199, **300**
$101\,m + 14$	$101\,n \pm 32$	**133**, 234; **170, 271**
$101\,m + 16$	$101\,n \pm 4$	**105**, 206, 307; **198, 299**
$101\,m + 17$	$101\,n \pm 44$	**145**, 246; **158, 259**

Eliminând din numerile ultimei coloane, pe cele 9 terminate în 0 şi 5, care au fost deja examinate, rămân 44 numere, care ar trebui ridicate la patrat, pentru a găsi pe z^2. Putem însă elimina încă unele numere, reducând astfel numărul ridicărilor la patrat. Observăm pentru aceasta, că prima cifră a rădăcinei lui $a\,b\,c\,b\,a$, este tocmai partea întreagă a lui $\sqrt{a}$, iar ultima cifră a radăcinei ridicată la patrat are la unităţi tocmai pe a. Această observaţie face să nu mai încercăm a cauta între soluţii de exemplu pe 221 pentru-că z, prima cifră a lui 221, arată că a este cuprins între 4 şi 8 încluziv, iar 1 ultima cifră a lui 221 arată ca a nu poatea fi de cât 1. Cu această observaţie, se elimină 28 numere şi rămân de ridicat la patrat numai 16 numere, pe care ridicându-le la patrat, rămân ca soluţii:

$101^2 = 10201$; $111^2 = 12321$; $121^2 = 14641$;
$202^2 = 40804$; $212^2 = 44944$; $264^2 = 69696$;
$307^2 = 94249$.

Se observă că 44944 este soluţie comună celor 2 cazuri ale problemei.

NOTĂ. Problema a fost examinată de foarte mulţi corespondenţi pe calea următoare: Se iau ultimele 2 cifre cu care se poate termina un patrat perfect, de exemplu 24, şi se formează numărul $24\,c\,24$ sau $42\,c\,24$. Apoi se dau lui c cele 10 valori de la 0 la 9. Numerele obţinute se examinează prin extrageri de rădăcini sau descompuneri în factori şi reţin ca soluţii ale problemei numai acelea, care sunt patrate perfecte. Această cale necesită însă foarte multe încercări, câte 10 de fie-care terminaţiune de patrat, în total câte 220 încercări pentru fie-care din cele 2 cazuri ale problemei.

Au urmat această cale şi au găsit, pentru ambele cazuri.

11 soluţiuni, d-nii: *Al. Comănescu* (lic. Galaţi), *Gh. I. Grofşoreanu* (Arad), *V. M. Lăzărescu* (lic. Giurgiu), *A. Pârvu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gh. D. Simionescu* (lic. Mânăstirea Dealului), *Em. Ştefănescu*, *V. V. Tăraş* (lic. Braşov) şi *Gh. Gh. Vasiliu*.

10 soluţiuni, d-nii: *Gh. Diaconu*, *P. I. Ionescu*, *V. Manafu*, *Al. A. Roşu* (lic. Mânăstirea Dealului) şi *I. C. Vasiliu*.

9 soluţiuni, d-nii: *D. N. Beldie* (lic. R Sărat), *I M. Miu* (lic. Caracul) şi *Gh. S. Gheorghiu* (Galaţi).

8 soluţiuni, d-nii: *N. G. Botea* (lic. Cantemir, Bucureşti), *B. V. Gataianţu* (lic. Caracal), *Gr. I. Grubenmann*, *C. T. Ionescu-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti).

7 soluţiuni, d-nii: *Tr. N. Angelescu* (lic. Giurgiu, *V. St. Iliescu* (lic. Mihai Viteazul, Tg-Mureş), *Corneliu N. Popescu* (lic. Giurgiu), *I. Th. Popovici* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti) şi *C. V. Ţanovici* (student).

6 soluţiuni, d-nii: *D. D. Constantinescu* (lic. Cantemir), *V. Novacu* (Arad), *V. Percea* (lic. Timişoara), *Dan A. Petrescu* (lic. Milit, Craiova), *I. I. Roman* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *I. C. Savin* (lic. Milit., Iaşi) şi *I. Gh. Silion* (lic. Braşov).

5 soluţiuni, d-nii: *Gh. David* şi *C. Purdilă*.

4 soluțiuni, d-nii: *R. Ardelea* (lic. Brasov), *M. M. Marcovici* (lic Botoșani), *P. Kertesz* (lic. Arad) și *Gr. I. Râmniceanu* (lic. Milit., Iași).

3 soluțiuni, d-l: *N. Teodorescu* (lic. Sp. Haret, București).

2 soluțiuni, d-l: *Gh. Vasiliu* (lic. Timișoara).

Nu au fost menționați rezolvitorii, care au găsit soluțiuni servindu-se de table de patrate perfecte.

1184. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 ka\,\cos(k+1)a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a}.$$

CEZAR IVANESCU

Prima soluție. Se cunoaște identitatea:

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{m}[f(k+1)-f(k)] = f(m+1) - f(1).$$

Luând:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 xa}{\sin a},$$

identitatea (1) devine:

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{tg}^2(k+1)a - \operatorname{tg}^2 ka}{\sin a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a}.$$

Dar:

$$\operatorname{tg}^2(k+1)a - \operatorname{tg}^2 ka =$$

$$\frac{\sin^2(k+1)a\cos^2 ka - \sin^2 ka\cos^2(k+1)a}{\cos^2 ka\,\cos^2(k+1)a} =$$

$$\frac{[\sin(k+1)a\cos ka + \sin ka\cos(k+1)a]}{\cos ka\,\cos(k+1)a} \times$$

$$\frac{[\sin(k+1)a\cos ka - \sin ka\cos(k+1)a]}{\cos ka\,\cos(k+1)a} =$$

$$\frac{\sin(2k+1)a\sin a}{\cos^2 ka\,\cos^2(k+1)a},$$

și înlocuind, avem după simplificarea cu *sin a:*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 ka\,\cos^2(k+1)a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a},$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Marteș Grigore* (lic. Milit., Chișinău), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Secăroiu D-tru* (Sub-Lt.) și *Tica P. Marin-Gall.*

Soluția autorului. Considerăm identitatea cunoscută:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y = \frac{\sin(x+y)\sin(x-y)}{\cos^2 x\cos^2 y},$$

care se mai poate scri:

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos^2 y\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y}{\sin(x-y)}.$$

Dacă aci facem succesiv:

$$x = a+b,\ y = a;\qquad x = a+2b,\ y = a+b;$$

$$\ldots\ldots;\qquad x = a+mb,\qquad y = a+(m-1)b,$$

avem respectiv:

$$\frac{\sin(2a+b)}{\cos^2 a\,\cos^2(a+b)} = \frac{\operatorname{tg}^2(a+b) - \operatorname{tg}^2 a}{\sin b}$$

$$\frac{\sin(2a+3b)}{\cos^2(a+b)\,\cos^2(a+2b)} = \frac{\operatorname{tg}^2(a+2b) - \operatorname{tg}^2(a+b)}{\sin b}$$

. . . . . .

$$\frac{\sin[2a+(2m-1)b]}{\cos^2[a+(m-1)b]\,\cos^2(a+mb)} =$$

$$\frac{\operatorname{tg}^2(a+mb) - \operatorname{tg}^2(a+b)}{\sin b}.$$

Adunând aceste relații, obținem:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin[2a+(2k-1)b]}{\cos^2[a+(k-1)b]\,\cos^2(a+kb)} = \frac{\operatorname{tg}^2(a+mb) - \operatorname{tg}^2 a}{\sin b}$$

Dacă aci facem $b = a$, avem:

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 ka\,\cos^2(k+1)a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a},$$

care este identitatea cerută.

1190. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + z^2 + xz = 13 \\ y^2 + z^2 + yz = 19 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Scăzând prima ecuație succesiv din a 2-a și a 3-a, obținem:

$$\begin{cases} z^2 - y^2 + x(z-y) = 6 \\ z^2 - x^2 + y(z-x) = 12, \end{cases}$$

sau:

$$(1)\qquad \begin{cases} (z-y)(x+y+z) = 6 \\ (z-x)(x+y+z) = 12. \end{cases}$$

Impărțind aceste ecuații, obținem:

$$\frac{z-x}{z-y} = 2, \quad \text{de unde:} \quad z+x = 2y.$$

In virtutea acestei relații, ecuația a 2-a din (1), simplificată cu 3, devine:

$$(z-x)y = 4.$$

Astfel considerăm ecuaţiile găsite:

$$(2)\qquad \begin{cases} z - x = \dfrac{4}{y} \\ z + x = 2y, \end{cases}$$

care pot înlocui pe două din ecuaţiile date.

Din (2) deducem:

$$(3)\qquad z = y + \frac{2}{y}$$
$$x = y - \frac{2}{y}.$$

Inlocuind pe z şi x astfel aflaţi, în a 2-a din ecuaţiile date, obţinem:

$$\left(y - \frac{2}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{y}\right)^2 + y^2 - \frac{4}{y^2} = 13,$$

sau:

$$3y^2 + \frac{4}{y^2} = 13,$$

care se mai poate scri:

$$3y^4 - 13y^2 + 4 = 0.$$

Rezolvind această ecuaţie bipatrată, găsim:

$$y = \pm\sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{121}}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13 \pm 11}{6}},$$

deci:

$$y = \pm 2 \qquad \text{şi} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Inlocuind aceste valori ale lui y în (3), avem valorile corespunzătoare pentru z şi x. Avem astfel următoarele patru sisteme de soluţii, pentru sistemul dat:

x	1	-1	$-\frac{5}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{\sqrt{3}}$
y	2	-2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
z	3	-3	$\frac{7}{\sqrt{3}}$	$-\frac{7}{\sqrt{3}}$

Soluţi date de d-ra: *Naneş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit, Craiova), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat), *Laţea P. C-tin*, *Mereută M.*, *Millea G. E.* (Sub-Lt), *Murgu M.* (lic. Eminescu, Beiuş), *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila), *Papazian Eduard* (lic. Eminescu, Bucuresti), *Pâslariu Vasile* (lic. Bârlad), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Predoescu M. Traian* (lic. Milit., Craiova), *Secăroiu D-tru* (Şc. Milit. de Artilerie), *Segărcianu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova), *Şuşală Gh.* (lic. Milit., Chişinău), *Weinstein Isac* (lic. Cogălniceanu, Iaşi) şi *Zaharescu Ilie* (lic. Milit., Iaşi).

Observare. D-nii *Amărăsteanu F. Marcel*, *Popa Nicolae*, *Predoescu I. Marin* şi *Predoescu M. Traian*, au observat, că un sistem analog cu cel propus, care diferă numai prin numerile din membrii al 2-lea, se găseşte în „Culegere de Probleme de Algebră" de *A. G. Ioachimescu*, pag. 53, Cap. XV, problema 36 şi în „Exercices d'Algébre, par „F. G. M", problema No. 1314.

1255. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se demonstreze că avem:*

$$1^0.\qquad \sum \sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$$

$$2^0.\qquad \sum \frac{r_a^2}{h_a + 2r_a} = 2R - r.$$

CEZAR IVANESCU

1°. Folosim formulele cunoscute:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad abc = 4Rs,\quad a+b+c = 2p,$$

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr,$$

şi avem succesiv:

$$\sum \sin^2\frac{A}{2} = \sum \frac{(p-b)(p-c)}{bc} =$$

$$\frac{a(p-b)(p-c) + b(p-c)(p-a) + c(p-a)(p-b)}{abc}$$

$$= \frac{p^2(a+b+c) - 2p(ab+bc+ca) + 3abc}{abc} =$$

$$\frac{-2p^3 + 2p^2(a+b+c) - 2p(ab+bc+ca) + 2abc}{abc} + 1$$

$$= 1 - 2\frac{p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc}{abc}$$

Dar e uşor de observat, că:

$$p^3 - (a+b+c)p^2 + (ab+bc+ca)p - abc =$$
$$(p-a)(p-b)(p-c),$$

astfel că putem scri:

$$\sum \sin^2\frac{A}{2} = 1 - \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} =$$

$$1 - \frac{2s^2}{pabc} = 1 - \frac{2s}{4pRs} = 1 - \frac{s}{2pR} = 1 - \frac{r}{2R}.$$

Identitatea 1° este astfel stabilită.

2°. Folosim relaţiile cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a},\qquad r_a = \frac{s}{p-a},$$

$$s = p\,r = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}\,,$$

$$a\,b\,c = 4\,R\,s,$$

şi avem succesiv:

$$\sum \frac{r_a^2}{h_a + 2\,r_a} = \sum \frac{\dfrac{s^2}{(p-a)^2}}{\dfrac{2\,s}{a} + \dfrac{2\,s}{p-a}} =$$

$$\sum \frac{a\,s}{2\,p\,(p-a)} = \sum \frac{a\,r}{2\,(p-a)} =$$

$$\frac{r}{2}\left(\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) =$$

$$\frac{r}{2} \cdot \frac{a\,(p-b)\,(p-c) + b\,(p-c)\,(p-a) + c\,(p-a)\,(p-b)}{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

$$= \frac{r\,p}{2\,s^2}\left[p^2\,(a+a+c) - 2\,p\,(a\,b + b\,c + c\,a) + 3\,a\,b\,c\right] =$$

$$\frac{1}{2\,s}\left\{a\,b\,c - 2\,[p^3 - (a+b+c)\,p^2 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,p - a\,b\,c\right\} =$$

$$\frac{1}{2\,s}\,[4\,R\,s - (p-a)\,(p-b)\,(p-c) =$$

$$2\,R - \frac{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{s} = 2\,R - \frac{s^2}{p\,s} =$$

$$2\,R - \frac{s}{p} = 2\,R - r.$$

Identitatea 2° este astfel stabilită.

Soluţii analoage sau obţinute folosind alte relaţii cunoscute, date de d-nii: *Amărăsteanu M* (lic. Buzeşti, Craiova), *Amărică Tibul* (lic. Militar, Cernăuţi), *Apostol Valerian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Botezatu P. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli P.* (Iaşi), *Căsoeanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac C-tin* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri) *Coadă Ion* (lic. Milit., Chişinău), *Coandă I. Virgil* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Coşovliu Ştefan* (lic. Milit., Chişinău), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Haret I. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ionescu D-tru* (lic. Milit., N. Filipescu), *Manea Dcsideriu* (lic. Beiuş), *Marteş Grigore* (lic. Milit, Chişinău), *Mihalcea N. Nicolae* (lic Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău) *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Petre O. Tudor* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popescu Adrian* (student), *Popescu Greaca-Vlad* (lic. Milit., Cernăuţi), *Predoescu I. Marin* (Şcoala Polit., Timişoara), *Râmbu Gh. Adrian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tica P. Marin Gal* (Şc. Milit. de Artilerie), *Trăsnitu Nicolaie* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasilescu Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

Observare. Identitatea 1° din enunţ a fost trimesă ca problemă de propus şi de d-l *Popescu Adrian* (student), fără a o cunoaşte din enunţul problemei 1255.

PROBLEME PROPUSE

1369. — Să se afle restul împărţirii prin 84 a expresiunei:

$$E = 30\,(30^{3k+2} - 10 \times 30^{3k+1} + 6),$$

k fiind un întreg pozitiv. EUGEN VISA

1370. — Un bipatrat de şease cifre, se poate termina cu un patrat de trei cifre?

MAIOR I LINTES

1371. — Să se construiască un triunghiu, cunoscând o latură, raportul celoralte două şi una din înălţimi. Discuţie. GH D. SIMIONESCU

1372. — Un unghiu drept se roteşte în jurul vârfului său fix. Laturile lui întâlnesc două drepte paralele Δ, Δ' respectiv în B, C şi B′, C′. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor B C′, B′ C şi al centrului de greutate al patrulaterului B C′ C B′.

COL. GH. BUICLIU

1373. — Să se dovedească divizibilitatea prin:

$$(x-1)^2,$$

a câtului polinomului:

$$x^{3n+1} - x^{3n} + 1,$$

prin, $x^2 + x + 1$. V. ALACI

1374. — Să se stabilească identitatea:

$$\sqrt{a + b + \sqrt{3\,c\,(2\,a - 3\,c) - 3\,b\,(b - 2\,a + 4\,c)}} + \sqrt{a + b - \sqrt{3\,c\,(2\,a - 3\,c) - 3\,b\,(b - 2\,a + 4\,c}} = \sqrt{4\,a - 2\,b - 6\,c}$$

M. AMARASTEANU

1375. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2\,y^2 + y^2\,z^2 + z^2\,x^2 = 49 \\ x^2\,y^2\,z^2 - 2\,(x\,y + y\,z + z\,x) = 14\,. \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1376. — Notaţiile fiind cele obicinuite, să se arate că în orice triunghiu, avem relaţia:

$$1 + \cos A \cos B \cos C = \frac{a\,b \cos C + b\,c \cos A + c\,a \cos B}{4\,R^2}$$

G. BOERESCU

Erată. In problema 1348, ecuaţia:

$$(2\,x + 3\,y^2)^2 + 3\,x\,y = 115,$$

se va înlocui prin:

$$(2\,x^2 + 3\,y^2)^2 + 3\,x\,y = 115.$$

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**.

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIII, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

Rugăm pe corespondenții noștrii a trimete de urgență costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul al XV-a, care începe la 15 Martie 1935.

ANUL XV. 15 APRILIE 1935 No. 2.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR IVANESCU: O TRANSFORMARE A RELATIILOR TRIGONOMETRICE.
2. N. O. ZAHARIA: DOMENIUL MATEMATICILOR IN CLASIFICAREA LUI AUGUSTE COMTE. (URMARE)
3. NOTE MATEMATICE: 3, 4.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 184, 1171, 1189, 1196. 1276.
6. PROBLEME PROPUSE: 1377-1384.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

O TRANSFORMARE A RELAȚIILOR TRIGONOMETRICE

de CEZAR IVANESCU

Fie A B C *triunghiul fundamental, iar* A′ B′ C′ *triunghiul său ortic* (format de picioarele înălțimilor). *Pornind dela relații cunoscute în triunghiul* A B C *și scriindu-le pentru triunghiul său ortic* A′ B′ C′ *obținem, ținând seamă de relațiile dintre elementele triunghiurilor* A B C *și* A′ B′ C′ *noui identități sau inegalități trigonometrice.*

Relațiile de trecere dela triunghiul A B C la triunghiul A′ B′ C′ de care mă voiu servi în cele ce urmează, sunt dealtfel destul de cunoscute; astfel avem:

$$A'=180^0-2A;\quad B'=180^0-2B;\quad C'=180^0-2C;$$

$$a'=a\cos A;\qquad b'=b\cos B;\qquad c'=c\cos C;$$

$$p'=\frac{S}{R};\qquad R'=\frac{R}{2};\qquad r'=2R\cos A\cos B\cos C;$$

$$S'=2S\cos A\cos B\cos C\quad \text{etc.},$$

notațiile elementelor triunghiului ortic fiind cele din triunghiul fundamental însoțite de accent.

Exemplele ce urmează vor arăta în deajuns că prin această metodă se obțin relații remarcabile între elementele triunghiului.

I. Să considerăm următoarea identitate:

$$(1)\quad \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Pentru triunghiul ortic ea devine:

$$\sin A'+\sin B'+\sin C'=4\cos\frac{A'}{2}\cos\frac{B'}{2}\cos\frac{C'}{2},$$

sau:

$$\sin(180^0-2A)+\sin(180^0-2B)+\sin(180^0-2c)=$$
$$4\cos(90^0-A)\cos(90^0-B)\cos(90^0-C),$$

sau încă:

$$(1')\quad \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

Identitatea trigonometrică (1) s'a transformat în identitatea (1′).

De asemeni identitățile:

$$(2)\quad \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$(3)\quad \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$$

$$(4)\quad \cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$$

$$(5)\quad \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$(6)\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}=1$$

$$(7)\quad \frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$$

$$(8)\quad \frac{\cot A+\cot B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}+\frac{\cot B+\cot C}{\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C}+\frac{\cot C+\cot A}{\operatorname{tg}C+\operatorname{tg}A}=1,$$

cari se găsesc și în „Culegere de probleme“ trig. cap. XVII, transformate în acelaș mod devin:

$$(2')\quad \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=$$
$$-1-4\cos A\cos B\cos C$$

$$(3')\quad \sin^2 2A+\sin^2 2B+\sin^2 2C=$$
$$2-2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$$

$$(4')\quad \cos^2 2A+\cos^2 2B+\cos^2 2C=$$
$$1+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C$$

$$(5')\quad \operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$$

$$(6')\quad \cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot C\cot A=1$$

$$(7')\quad \frac{\cos 2A}{\sin 2B\sin 2C}+\frac{\cos 2B}{\sin 2C\sin 2A}+$$
$$\frac{\cos 2C}{\sin 2A\sin 2B}=-2$$

$$(8') \quad \frac{\cot 2A+\cot 2B}{\operatorname{tg} 2A+\operatorname{tg} 2B}+\frac{\cot 2B+\cot 2C}{\operatorname{tg} 2B+\operatorname{tg} 2C}+\frac{\cot 2C+\cot 2A}{\operatorname{tg} 2C+\operatorname{tg} 2A}=1.$$

Dacă acum transformăm şi identităţile (5′) şi (6′), avem:

$$(5'') \quad \operatorname{tg} 2A+\operatorname{tg} 2B+\operatorname{tg} 2C=\operatorname{tg} 2A \operatorname{tg} 2B \operatorname{tg} 2C$$

$$(6'') \quad \cot 2A \cot 2B+\cot 2B \cot 2C+\cot 2C \cot 2A=1.$$

Din identităţile (5) şi (6) am obţinut deci printr'o dublă transformare identităţile (5″) şi (6″).

Identitatea:

$$(9) \quad \sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=2 \sin B \sin C \cos A$$

şi analoagele ei stabilite în „R. M. T.“, Anul XI, No. 8, ne dau prin transformare:

$$(9') \quad \sin^2 2B+\sin^2 2C-\sin^2 2A=-2 \sin 2B \sin 2C \cos 2A$$

şi analoagele.

Până acum am transformat şi obţinut relaţii ce există numai între unghiurile unui triunghiu.

Vom da câteva exemple de identităţi ce se obţin, transformând relaţii care cuprind în afară de unghiuri şi alte elemente de ale triunghiului.

Incep cu cele mai cunoscute şi anume:

$$(10) \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$(11) \quad \operatorname{tg} \frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \text{ etc.}$$

$$(12) \quad a^2=b^2+c^2-2bc \cos A \quad \text{etc.,}$$

care se transformă respectiv în:

$$(10') \quad \frac{a \cos A}{\sin 2A}=\frac{b \cos B}{\sin 2B}=\frac{c \cos C}{\sin 2C}=R$$

$$(11') \quad \operatorname{tg}(C-B)=\frac{b \cos B-c \cos C}{b \cos B+c \cos C} \operatorname{tg} A \quad \text{etc.}$$

$$(12') \quad a^2 \cos^2 A=b^2 \cos^2 B+c^2 \cos^2 C+2bc \cos B \cos C \cos 2A \quad \text{etc.}$$

Deasemeni din relaţiile:

$$(13) \quad (b+c-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}=(c+a-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}=(a+b-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

$$(14) \quad (b-c) \cos^2 \frac{A}{2}+(c-a) \cos^2 \frac{B}{2}+(a-b) \cos^2 \frac{C}{2}=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{4Rr}$$

$$(15) \quad \frac{b+c}{a} \cos^2 \frac{A}{2}+\frac{c+a}{b} \cos^2 \frac{B}{2}+\frac{a+b}{c} \cos^2 \frac{C}{2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4Rr}.$$

(Culegere de probleme trig. cap. XVIII), obţinem pe următoarele:

$$(13') \quad (b \cos B+c \cos C-a \cos A) \cot A=(c \cos C+a \cos A-b \cos B) \cot B=(a \cos A+b \cos B-c \cos C) \cot C.$$

$$(14') \quad \sum (b \cos B-c \cos C) \sin^2 A=\frac{(a \cos A-b \cos B)(b \cos B-c \cos C)(c \cos C-a \cos A)}{4R^2 \cos A \cos B \cos C}$$

$$(15') \quad \sum \frac{b \cos B+c \cos C}{a \cos A}=\frac{a^2 \cos^2 A+b^2 \cos^2 B+c^2 \cos^2 C}{4R^2 \cos A \cos B \cos C}.$$

Dacă am fi scris relaţia (13) sub forma:

$$(16) \quad (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}=(p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2}=(p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

aveam prin transformare:

$$(16') \quad (S-aR \cos A) \cot A=(S-bR \cos B) \cot B=(S-cR \cos C) \cot C.$$

În acelaş mod relaţiile cunoscute:

$$(17) \quad S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$(18) \quad 2S=\frac{a^2}{\cot B+\cot C}=\frac{b^2}{\cot C+\cot A}=\frac{c^2}{\cot A+\cot B}$$

$$(19) \quad 4S=a^2 \cot A+b^2 \cot B+c^2 \cot C$$

$$(20) \quad S=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)},$$

se transformă în:

$$(17') \quad 4SR^4 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C=(S-aR \cos A)(S-bR \cos B)(S-cR \cos C)$$

$$(18') \quad -4S \cos A \cos B \cos C=\frac{a^2 \cos^2 A}{\cot 2B+\cot 2C}=$$

$$\frac{b^2\cos^2 B}{\cot 2C+\cot 2A}=\frac{c^2\cos^2 C}{\cot 2A+\cot 2B}$$

(19′) $8S\cos A\cos B\cos C=-(a^2\cos^2 A\cot 2A+b^2\cos^2 B\cot 2B+c^2\cos^2 C\cot 2C)$

(20′) $$8S\cos A\cos B\cos C=-\frac{a^2\cos^2 A+b^2\cos^2 B+c^2\cos^2 C}{\cot 2A+\cot 2B+\cot 2C}.$$

Relaţiile obţinute până acum sunt generale, căci triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ nu au fost supuse la nici o condiţie.

Ne propunem acum să considerăm cazul când triunghiul $A'B'C'$ este dreptunghic în A' spre exemplu.

De oarece:

$$A'=180^0-2A,$$

rezultă că pentru:

$$A'=\frac{\pi}{2},\quad \text{avem:}\quad A=\frac{\pi}{4},$$

In acest caz, pornind dela relaţii ce există într'un triunghiu dreptunghic, obţinem prin transformare relaţii ce există într'un triunghiu în care $A=\frac{\pi}{4}$, triunghiu pe care l-am putea numi semidreptunghic.

Triunghiul $A'B'C'$ fiind dreptunghic, avem relaţiile:

(21) $$b'^2+c'^2=a'^2$$

(22) $$\cot\frac{B'}{2}=\frac{c'+a'}{b'}$$

(23) $$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B'}{2}+\operatorname{tg}\frac{C'}{2}}-\frac{1}{\cot\frac{B'}{2}+\cot\frac{C'}{2}}=1,$$

cari ţinând seamă de formulele de transformare, conduc la:

(21′) $$b^2\cos^2 B+c^2\cos^2 C=a^2\cos^2 A$$

(22′) $$\operatorname{tg} B=\frac{c\cos C+a\cos A}{b\cos B}$$

(23′) $$\frac{1}{\cot B+\cot C}-\frac{1}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}=1,$$

relaţii care există într'un triunghiu semidreptunghic.

In mod analog am putea considera şi alte cazuri particulare.

II. Cu ajutorul acestei metode, se pot transforma după cum am amintit de altfel şi inegalităţi ce există între elementele unui triunghiu.

Fie de exemplu inegalitatea:

(24) $$2r\leqq R,$$

stabilită în „R. M. T.“ Anul VIII, No. 3, articolul *„Câteva inegalităţi“*.

Ţinând seamă de formulele de transformare ea se scrie:

*** $$4R\cos A\cos B\cos C\leqq\frac{R}{2}$$

(24′) $$8\cos A\cos B\cos C\leqq 1.$$

De asemeni inegalităţile:

(25) $$\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}\geqq 9\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

(26) $$\cot^2\frac{A}{2}+\cot^2\frac{B}{2}+\cot^2\frac{C}{2}\geqq 9,$$

stabilite în articolul sus citat, se transformă respectiv în:

(25′) $\cot A+\cot B+\cot C\geqq 9\cot A\cot B\cot C$

(26′) $\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C\geqq 9.$

Inegalităţile (25′) şi (26′) transformate şi ele, ne dau:

(25″) $-(\cot 2A+\cot 2B+\cot 2C)\geqq -9\cot 2A\cot 2B\cot 2C$

(26″) $\operatorname{tg}^2 2A+\operatorname{tg}^2 2B+\operatorname{tg}^2 2C\geqq 9.$

Inegalitatea (25″) se poate încă scri:

$\cot 2A+\cot 2B+\cot 2C\leqq 9\cot 2A\cot 2B\cot 2C.$

In acelaş articol pag. 68 se stabileşte următoarea inegalitate:

$a^3+b^3+c^3\geqq 3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu, inegalitatea se poate scrie:

(27) $a^3+b^3+c^3\geqq 24(p-a)(p-b)(p-c).$

Transformând-o avem:

(27′) $a^3\cos^3 A+b^3\cos^3 B+c^3\cos^3 C\geqq \frac{24}{R^3}(S-aR\cos A)(S-bR\cos B)(S-cR\cos C).$

In fine din inegalităţile:

(28) $\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\geqq\frac{3}{4}$

(29) $\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C\geqq 1.$

(Culegere de problem, cap. XVII) obţinem pe următoarele:

(28′) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C\geqq\frac{3}{4}$

(29′) $\cot^2 2A+\cot^2 2B+\cot^2 2C\geqq 1.$

Cred că am invederat o nouă metodă de transformare, a formulelor trigonometrice.

DOMENIUL MATEMATICILOR IN CLASIFICAREA LUI AUGUSTE COMTE

DE N. O. ZAHARIA

(urmare)

3. Trecând la cea de a doua parte a primei diviziuni, stabilită la început, vom recunoaşte marea importanţă filosofică pe care *Comte* o acordă geometriei şi mecanicei. Discuţia critică a consideraţiilor privitoare la aceste două ramuri ne intrând în cadrul articolului nostru, vom aborda dela început studiul diviziunilor celei dintâi. Interesează definiţiile pe care *Comte* le dă noţiunilor fundamentale: suprafaţă, linie, punct, — după̆ce s'a definit spaţiul şi volumul. Se concepe *suprafaţa* ca un volum a cărui una din cele trei dimensiuni (grosimea) descreşte din ce în ce, până când termină prin a fi eliminată. *Linia*, va fi elementul ce se obţine în acelaş mod, presupunând micşorarea progresivă, până la eliminare, a uneia din dimensiunile suprafeţei (lăţimea). Insfârşit, printr'o operaţie analoagă, se ajunge la conceperea noţiunii de *punct*. Deci suprafeţele şi liniile sunt realmente concepute cu trei dimensiuni: va fi într'adevăr imposibil — spune *Comte* — de a se reprezenta o suprafaţă, altfel decât ca o placă extrem de subţire şi o linie altfel decât ca un fir infinit de subţire.

Dintre aceste elemente geometrice, în efectuarea *măsurii*, singură compararea liniilor este directă, — şi în speţă a liniilor drepte.

Aceste definiţii determină trei mari secţiuni, dupăcum se studiază liniile, suprafeţele sau volumele.

Descoperirea însă, de către *Descartes*, a geometriei analitice, furnizează o primă diviziune, fiecare ramură purtând asupra unor metode esenţial diferite: *geometria anticilor* şi *geometria modernilor;* sau, cum le numeşte *Comte: specială* şi *generală*. Prima studiază, una câte una, diversele linii sau suprafeţe; cea de a doua se referă la forme oarecari. Geometria specială constitue o întroducere indispensabilă la geometria generală.

Comte reduce domeniul geometriei elementare propriu zisă, la studiul numai al liniei drepte, al cuadraturii ariilor plane rectilinii şi la volumul corpurilor terminate cu feţe plane, — excluzând figurile rotunde, inclusiv cercul, cari toate întră în câmpul preocupărilor geometriei analitice. Problemele geometriei elementare pot fi susceptibile de două soluţii: una grafică şi cealaltă algebrică. Pentru facilitarea studiului suprafeţelor şi volumelor cari nu pot fi copiate sau reproduse, la o scară fixă, pe hârtie, *Monge* a creat o teorie aparte: *geometria descriptivă*. Ceeace-i acordă, după *Comte*, un interes filosofic acestei geometrii, este faptul că ea exerteză imaginaţia, adică *reprezentarea netă a unei vaste mulţimi de obiecte fictive, ca şi cum ele ar fi sub ochii noştri*. Soluţia generală a geometriei elementare este rezervată *trigonometriei*. Concepţia fundamentală a acestei ramuri constă în a înlocui, în relaţiile algebrice, unghiurile şi arcele prin nişte segmente de drepte cari le corespund: liniile trigonometrice. Studiul trigonometriei se împarte în trei: prima parte are în vedere trecerea dela unghiuri la liniile lor trigonometrice şi invers, reducându-se la calcularea unor table, odată pentru totdeauna; a doua parte îşi propune a determina laturile triunghiurilor prin liniile trigonometrice ale unghiurilor lor şi invers; iar ultima, stabileşte relaţiile ce există între liniile trigonometrice, fie întregi, fie multiple. Studiul acestor trei părţi trebue făcut în ordinea înversă a enumerării de mai sus, având în vedere scopul final al trigonometriei: rezolvarea triunghiurilor.

In mod obişnuit se înţelege prin problema geometriei analitice, *algebrizarea* ideilor geometrice. Acestea din urmă se raportă la trei categorii: mărimea, forma şi poziţiunea. Forma unui corp

depinzând de pozițiile punctelor cari-l compun, se reduce la ideia de poziție. Deci dificultatea constă în a transforma ideile de situație, în idei de mărime. Aceasta este, după *Comte*, ideea de bază în constituirea geometriei analitice. Trecerea dela situație la mărime, se efectuează cu ajutorul coordonatelor, dintre cari cele mai frecvente sunt cele rectilinii și cele polare. In geometria veche, o linie este definită printr'o proprietate esențială care-i este proprie, deosebind-o de alte linii. Această definiție, ni se spune, este în totdeauna susceptibilă de a fi înlocuită printr'o ecuație corespunzătoare între coordonatele punctului, care descrie linia. Explicația acestui fapt este următoarea: Presupunând că un punct se mișcă în plan, fără ca pozițiile lui succesive să fie supuse unei legi fixe, coordonatele sale vor fi două variabile independente una de alta. De indată ce punctul este silit să rămână pe o linie *definită*, o singură coordonată ajunge pentru a-i fixa poziția; cealaltă este deci o *funcție* determinată de aceasta, ceeace este echivalent cu existența unei *ecuații* care leagă între ele coordonatele variabile ale punctului, care descrie linia. Procesul acesta, de transpunere a faptelor geometrice în fapte algebrice, comportă o discuție specială. Ceeace interesează în primul rând este, dacă orice definiție a unei linii este susceptibilă de a fi tradusă într'o relație algebrică. *Comte* clasează definițiile în: *carecteristice* și *explicative*. Este caracteristică o definiție, atunci când ea indică o proprietate care nu face decât să cunoaștem generația obiectului; și este explicativă, atunci când caracterizează obiectul printr'o proprietate care exprimă unul din modurile sale de generații. De pildă, cercul, poate fi definit ca fiind linia care, într'un acelaș contur continuu închide cea mai mare arie; sau, ca posedând proprietatea de a avea toate punctele sale egal depărtate de un punct fix. Prima e caracteristică, cea de a doua explicativă. Aci sfârșește *Comte* discuția, declarând că explicațiile de mai sus nu se aplică decât definițiilor de al doilea fel. Dar lucrurile par să nu stea tocmai așa. E deajuns să căutăm maximul expresiei analitice (în funcție de cele două coordonate, rectilinii de pildă) a ariei plane, pentru a deduce ecuația liniei, care fiind de lungime constantă, închide o suprafață maximă. De asemenea ecuația cercului se mai poate obține, căutând curba plană de curbură constantă. Este această din urmă definiție caracteristică sau explicativă? După concepția lui *Comte*, nu mai există îndoială: aparține primei categorii. Aceste exemple sunt suficiente, deocamdată, pentru a arăta insuficiența considerațiilor sale.

Geometria analitică este compusă din două ramuri: geometria analitică cu două dimensiuni și geometria analitică cu trei dimensiuni.

In fond, chestiunile de geometrie plană pot fi repartizate numai în trei clase, după metodele de calcul întrebuințate: în prima clasă intră cele ce nu depind decât de analiza ordinară (algebra); în a doua, cele a căror soluție cere întrebuințarea calculului diferențial; și în a treia, cele ce nu pot fi rezolvate decât cu ajutorul calculului integral.

Comte înscrie, ca fiind prima chestiune ce trebuește rezolvată, relativ la o curbă oarecare, cunoașterea, după forma ecuației, a numărului de puncte nesesare determinării sale, — ceeace constitue de altfel, un capitol întreg, în teoria curbelor plane. Chestiunea prezintă mai mult interes atunci când este vorba și de punctele de inflexiune, de rebrusment, etc. — alături de care *Comte* pune, sub acelaș nume general (de puncte *singulare*), focarele, vârfurile și centrele. In definitiv, fiecare punct singular trebue conceput ca fiind contopirea a două puncte ordinare; deci în enumerare trebuesc socotite de două ori. O altă problemă care-și găsește locul într'un curs de filosofie pozitivă, este aceea a *similitudinei* curbelor, care comportă fie o soluție pur algebrică, fie una de analiză diferențială.

O mare mulțime de probleme nu pot fi rezolvate decât cu ajutorul analizei infinitezimale. Ne vom mulțumi numai să le enumerăm: problema tangentelor (cu cele trei cazuri cunoscute), problema asimptotelor, teoria punctelor singulare, curbura curbelor, desfășurate și înfășurătoare, însfârșit familiile de curbe. Ca o extensiune a teoriei cercului osculator, *Comte* menționează teoria generală a contactelor, unde se folosesc drept termeni de comparație, curbe mai complicate decât cercul, dar ale căror proprietăți sunt tot atât de bine cunoscute dinainte.

Trecând la geometria analitică cu trei dimensiuni, se disting aceleaşi trei clase de probleme. Prima clasă, care se compune din probleme a căror rezolvare cere numai întrebuinţarea algebrei, se prezintă în mod identic cu cea din geometria plană. Singura diferenţă este introducerea unei variabile în plus. In ce priveşte chestiunile cari cer întrebuinţarea calculului infinitezimal, ele se repetă şi aci, fiind însă mai puţin simple, iar soluţiile lor mai puţin perfecte, — cum este, de pildă, teoria contactelor. Aci, teoria curburii la o suprafaţă conduce la teoria secţiunilor şi a liniilor de curbură. Chestiunile cari depind de calculul integral sunt: calcularea suprafeţelor şi volumelor.

(Va urma)

NOTE MATEMATICE

3. — *Sur le tétraèdre isoscèle.*

1. Un tétraèdre isoscèle A B C D, dont les arêtes opposées sont égales deux à deux, a trois axes de symétrie rectangulaires, qui sont les droites $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\lambda\mu$ joignant les milieux des arêtes opposées A B et C D, A C et D B, A D et B C, et réciproquement. Ces droites sont les perpendiculaires communes à ces arêtes.

Par une rotation d'un demi-tour autour de l'axe $\alpha\beta$, par exemple, les points A et B prennent la place l'un de l'autre ainsi que D et C. La face A B C vient donc sur B A D et si P_d, P_c, P_b, P_a sont des points homologues situés dans les faces B A C, B A D, D A C, B C D, la droite A P_d vient coïncider avec la droite B P_c. Le tétraèdre P_a P_b P_c P_d a donc aussi la propriété de coïncider avec lui-même par un demi-tour autour des axes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\lambda\mu$. Ce tétraèdre est donc isoscèle; le centre de gravité, qui est en même temps le centre de la sphère circonscrite et de la sphère inscrite, est le point de rencontre des trois axes; il est le même que celui du tétraèdre A B C D.

Si l'on marque sur les droites A P_a, B P_b, C P_c, D P_d des points P, Q, S, T tels que les segments rectilignes A P, B Q, C S, D T soient égaux et de même sens, le sens positif étant celui des sommets A, B, C, D vers les faces opposées, dans la rotation d'un demi-tour autour de l'axe $\alpha\beta$, par exemple, les points T, S coïncident et le tétraèdre P Q S T, qui coïncide avec lui-même par un demi-tour autour des axes $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\lambda\mu$, est isoscèle, son centre de gravité se confond encore avec celui du tétraèdre A B C D.

2. Ces remarques conduisent aux propositions suivantes:

a) Les tétraèdres ayant pour sommets les orthocentres des faces[1], *ou les centres des cercles circonscrits, ou les contacts des sphères exinscrites dans les trièdres tronqués avec les plans des faces d'un tétraèdre isoscèle, sont isoscèles.*

b) Si sur les hauteurs d'un tétraèdre isoscèle A B C D, *à partir des sommets et dans le même sens, on porte des longueurs égales* A P, B Q, C S, D T, *le tétraèdre* B Q S T *est isoscèle et a même centre* O *de gravité que* A B C D. *Cela s'applique en particulier au tétraèdre ayant pour sommets les pieds des hauteurs, ou les seconds points de rencontre des hauteurs avec la sphère cirsonscrite, ou les projections du point* O *sur les hauteurs, d'où il résulte que l'hyperboloide des hauteurs n'est pas de révolution.*[1]

c) Si l'on construit extérieurement sur les faces B C D, C D A, D A B, A B C *des tétraèdres isoscèles* B C D A_1, C D A B_1, D A B C_1, A B C D_1, *les segments rectilignes* A A_1, B B_1, C C_1, D D_1, *sont égaux; le tétraèdre* A_1 B_1 C_1 D_1 *est isoscèle et son centre de gravité coïncide avec celui du tétraèdre* A B C D.

Il suffit en effet d'observer que les tétraèdres qui bordent le tétraèdre A B C D lui sont symétriques par rapport aux plans de faces B C D, C D A, D A B, A B C.

V. THÉBAULT

4. — *Asupra unor transformări hiperbolice.*

Newton[2], numeşte transformare hiperbolică a unei curbe $f(xy)=0$, transformarea definită de relaţia: $y=xy$, ceiace dă pentru ecuaţia propusă $f(x, xy)=0$. Este uşor de remarcat că în cazul general, dacă gradul ecuaţiei $f(xy)=0$ este n, gradul transformatei 2 n. In cazul însă, când lipsesc coeficienţii celor mai mari puteri ale lui y, atunci gradul transformatei este mai mic ca 2 n.

[1]) Ces propriétés ont élé énoncées, sans démonstration, par *M. J. Lemaire*, *Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1914 p. 504.

[2]) *B. Niewenglowschi* — Cours de Géom. Anal. Tome II. (Pag. 117).

I. Să considerăm dreapta:

(1) $$a x + b y + c = 0,$$

în care punem: $y = x y$, ecuaţia (1) devine:

$$b x y + a x + c = 0,$$

care reprezintă o conică şi anume o hiperbolă propriu zisă, fiindcă $\delta < 0$ şi $\Delta \neq 0$. Centrul, dat de ecuaţiile:

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0$$

are drept coordonate $\left(0, -\frac{a}{b}\right)$.

Axele hiperbolei sunt date de:

$$(b y + a)^2 - b^2 x^2 = 0,$$

adică dreptele:

(2) $$b y - b x + a = 0$$

(3) $$b y + b x + a = 0.$$

Aceste două drepte sunt simetrice în raport cu axa y-ilor. Unghiul format de axele (2) şi (3) este dat de:

$$\operatorname{tg} u = \frac{-2 b^2}{b^2 - b^2},$$

de unde urmează că $\sphericalangle u = 90^0$. Ceiace ne permite să afirmăm în general:

Transformata hiperbolică a unei drepte oarecari este o hiperbolă echilateră.

II. Să considerăm cazul, când dreapta trece prin origină:

$$y = m x,$$

care în cazul nostru va deveni:

$$x y - m x = 0,$$

sau:

$$x (y - m) = 0,$$

deci se descompune în dreptele:

$$x = 0 \qquad \text{(axa } y\text{-lor)}$$

şi

$$y = m.$$

III. Se ştie, că sistemul a două drepte oarecari într'un acelaşi plan, formează ceiace numim o conică rectilinie[1]. Dacă se consideră centrul acestei conice în origine, — centrul conicei fiind punctul de intersecţie a celor două drepte, — ecuaţia acestei conice se poate scrie:

$$y^2 - (a + b)\, x y + a b x^2 = 0,$$

transformând hiperbolic această conică se găseşte:

$$x^2 y^2 - (a + b)\, x^2 y + a b x^2 = 0,$$

care se descompune în:

$$x^2 = 0,$$

deci axa y-ilor luată de două ori, şi în conica:

$$y^2 - (a + b)\, y + a b = 0,$$

de gen parabolă ($\delta = 0$, $\Delta = 0$) şi care reprezintă dreptele paralele cu axa x-ilor:

$$y = a \qquad \text{şi} \qquad y = b.$$

Transformând şi alte curbe se pot obţine rezultate interesante.

MIHAIL BOTEZ

[1]) *Mouchot* — Les nouvelles bases de la Géom. Supér. 1892 (Pag. 61.)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică, anul XL, No. 7, Martie 1935.* Sur le tétraèdre orthocentrique, par *V. Thébault.* Un curs forestier de matematici, de *I. Ionescu.* Despre eforturi dinamice, de *Maior I. Linteş.* Asupra unor tetraedre, de *C. Ionescu-Bujor.* Premiu pentru concursul „Gazetei Matematice".

2. *Ştiinţă şi Progres*, revista ştiintifică a liceelor militare, anul II, No. 1. După un an de activitate. Proprietăţi ale patrulaterului complect, de *D. V. Ionescu*, profesor la facultatea de Ştiinţe, Cluj. Hibernare la plante şi animale, de *C. Cojocarea*, profesor la liceul militar, Iaşi.

3. *Revista Cercului de studii al şcoalei superioare P. T. T, Timişoara*, anul IV, No. 3, Martie 1935. Măsurători efectuate în telegrafie, de Ing. *Ion C. Schileru.* Principiile răspunderii pentru mandatele postale şi buletinele de vărsământ-cec, de *Inspect. Dr. Eugen Covaci.* Problema alimentării aparatelor telegrafice, de *Ionescu C.* Posta în Groelanda. Pagina matematică.

4. *C. Budeanu*, profesor la şcoala politechnică din Bucureşti. Sur le fonctionnement d'un appareil déformant. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 199, p. 1598, séance du 26 décembre 1934).

5. *G. G. Constantinesco.* La réfraction astronomique. (Extrait du „Bulletin Scientifique de l'École polytechnique de Timişoara", tome 5, fasc. 3—4).

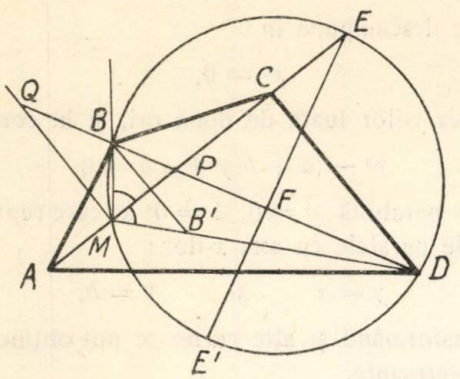
PROBLEME REZOLVATE

184. — *Pe diagonala A C a unui patrulater inscriptibil* A B C D, *să se găsească un punct* M, *astfel ca* A C *să fie una din bisectoarele unghiului* B M D.

GENERAL GH. BUICLIU

Soluţia I. Dacă A C este bisoctoarea unghiului B M D, atunci simetricul B' al lui B faţă de A C' se găseşte pe B M şi reciproc. De aci următoarea

construcţie: Se uneşte D cu B′ şi se ia intersecţia M al lui D B′ cu A C.



Problema are o singură soluţie şi e totdeauna posibilă, dacă D B′ nu este paralelă cu A C, adică dacă B M D fiind de o parte şi de alta a lui A C, distanţele de la B şi D la A C nu sunt egale.

Din soluţie se vede că cele 4 puncte A, B, C, D pot fi oricum în plan.

Au rezolvat problema pe această cale d-nii: *Angelescu N. Tr., Balint Em, Bolgiu O., Brădeţeanu C. C., Damşescu A., Dospinoiu N., Fericeanu St., Gabrielescu C. V., Măru D., Pârăianu N., Popeanu A., Popovici Th. I., Rădulescu P. S., Răduleţ B. R., Schumacher E., Scodrano Al., Solomon N., Stănculescu I. C., Steblea Şt., Stratulat I., Tărăbuţă C. P., Theodoridis V. T., Udrisky Tr., Vasilescu M.* şi *Weiss L.*

Soluţia II. Se construeşte cercul D M B. De oarece A C este bisectoarea unghiului D M B, punctul E unde A C întâlneşte acel cerc, este mijlocul cercului B E D, adică este pe perpendiculara în mijlocul lui B D. — Şi reciproc. — Deci construcţia: Se ia intersecţia E a lui A C cu perpendiculara pe mijlocul lui B D şi apoi intersecţia M a lui A C cu cercul B E D.

Punctul M este aruncat la infinit când A C este perpendicular pe B D.

Au rezolvat problema pe această cale d nii: *Berdan C., Ciorănescu I. C., Dorneanu S. V., Florea C. A., Gheorghiu Th. Gh., Lepădatu I. V., Percea V., Pitea P. D., Popovici C. C., Popoviciu T., Silion Gh. I.* şi *Vasiliu C. I.*

Soluţia III. Fie P intersecţia diagonalelor A C, B D şi Q piciorul celeia de a doua bisectoare a unghiului M în triunghiul B M D. Se ştie că:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{DM}},$$

deci P, Q divid armonic segmentul B D. Se construeşte deci punctul Q, conjugat armonic al lui P faţă de B şi D. Piciorul M al perpendicularei din Q pe A C este punctul căutat.

Au rezolvat problema pe această cale d-nii: *Atanasiu D., Bejan C. Tr., Botea N., Coşereanu I., Georgescu-Val N. I., Marinescu M. I, Niculescu Al., Popea Gh. O.* şi *Răuţ C. C.*

1171. — *Să se afle divizorii polinomului:*

$$x^{4m} + x^{4m-2}y^2 + \cdots + x^2 y^{4m-2} + y^{4m}$$

ION MARGINEANU

Putem scri succesiv:

$$(1)\quad x^{4m} + x^{4m-2}y^2 + \cdots + x^2 y^{4m-2} + y^{4m} = \frac{x^{4m+2} - y^{4m+2}}{x^2 - y^2} = \left(\frac{x^{2m+1} + y^{2m+1}}{x+y}\right)\left(\frac{x^{2m+1} - y^{2m+1}}{x-y}\right)$$

Dar:

$$\frac{x^{2m+1} + y^{2m+1}}{x+y} = x^{2m} - x^{2m-1}y + \cdots - x\,y^{2m-1} + y^{2m}$$

$$\frac{x^{2m+1} - y^{2m+1}}{x-y} = x^{2m} + x^{2m-1}y + \cdots + x\,y^{2m-1} + y^{2m}$$

Rezultă de aci că egalitatea (1), se poate scri:

$$x^{4m} + x^{4m-2}y^2 + \cdots + x^2 y^{4m-2} + y^{4m} = (x^{2m} - x^{2m-1}y + \cdots - x\,y^{2m-1} + y^{2m})(x^{2m} + x^{2m-1}y + \cdots + x\,y^{2m-1} + y^{2m}).$$

Astfel, sunt puşi în evidenţă divizorii polinomului dat.

1189. — *Să se demonstreze că polinomul:*

$$\frac{(p-1)\,p\,(2p-1)}{6} - \frac{p\,(p^2-1)}{3}x + \sum_{k=2}^{p}(k-1)\,x^k,$$

se divide prin $(x-1)^2$ *şi să se afle câtul.*

V. ALACI

Pentru a dovedi că polinomul dat, notat cu $P(x)$, se divide prin $(x-1)^2$, vom dovedi, că el şi derivata lui $P'(x)$, se anulează pentru $x=1$.

In adevăr, avem:

$$P(1) = \frac{(p-1)\,p\,(2p-1)}{6} - \frac{p\,(p^2-1)}{3} + [1+2+3+\cdots+(p-1)] =$$

$$\frac{(p-1)\,p\,(2p-1)}{6}-\frac{p(p^2-1)}{3}+\frac{(p-1)\,p}{2}=$$

$$\frac{(p-1)(2p^2-p-2p^2-2p+3p)}{6}=0.$$

De asemenea observând că:

$$P'(x)=-\frac{p(p^2-1)}{3}+\sum_{k=2}^{p}k(k-1)x^{k-1},$$

avem:

$$P'(1)=-\frac{p(p^2-1)}{3}+\sum_{k=1}^{p}(k^2-k)=-\frac{p(p^2-1)}{3}$$

$$+(1^2+2^2+\cdots+p^2)-(1+2+\cdots+p)$$

$$=-\frac{p(p^2-1)}{3}+\frac{p(p+1)\,(2p+1)}{6}-\frac{p(p+1)}{3}$$

$$=\frac{(p+1)\,(-2p^2+2p+2p^2+p-3p)}{6}=0.$$

Având $P(1)=0$ şi $P'(1)=0$, rezultă că polinomul dat $P(x)$, este divizibil prin $(x-1)^2$.

Să aflăm acum câtul lui $P(x)$, prin $(x-1)^2$. Dividem întâi $P(x)$ prin $(x-1)$ şi câtul obţinut îl dividem apoi tot prin $(x-1)$.

Pentru aceasta reamintim următoarele: câtul împărţirei unui polinom:

(1) $$A_0x^p+A_1x^{p-1}+\cdots+A_{p-1}x+A_p,$$

prin $(x-1)$, este după regula câtului:

$$A_0x^{p-1}+(A_0+A_1)x^{p-2}+\cdots+(A_0+A_1+\cdots$$

$$\cdots+A_k)x^{p-k-1}+\cdots+(A_0+A_1+\cdots+A_{p-1}).$$

Acest polinom divizat prin $(x-1)$, dă câtul:

(2) $$A_0x^{p-2}+(2A_0+A_1)x^{p-3}+\cdots$$

$$\cdots+[(k+1)A_0+kA_1+\cdots+2A_{k-1}+A_k]x^{p-k-2}+\cdots$$

$$\cdots+[(p-1)A_0+(p-2)A_1+\cdots+2A_{p-3}+A_{p-2}].$$

Aşa dar polinomul (1) divizat prin $(x-1)^2$, dă câtul (2).

Dacă luăm acum:

$$A_0=p-1,\qquad A_1=p-2,\ldots,$$

(3) $$A_k=p-k-1,\ldots,\qquad A_{p-2}=1,$$

$$A_{p-1}=-\frac{p(p^2-1)}{3},\qquad A_p=\frac{(p-1)\,p\,(2p-1)}{6},$$

polinomul (1) este identic cu polinomul dat în enunţ şi câtul împărţirei lui prin $(x-1)^2$, pe care să'l notăm cu $Q(x)$, rezultă din cele expuse că este dat de (2), unde $A_0, A_1, \ldots, A_p$ au valorile date de (3).

Avem astfel:

$$Q(x)=(p-1)x^{p-2}+(3p-4)x^{p-3}+\cdots$$

$$\cdots+[(k+1)(p-1)+k(p-2)+\cdots+2(p-k-2)$$

$$+(p-k-1)]x^{p-k-2}+\cdots+[(p-1)^2+(p-2)^2+\cdots$$

$$\ldots+2^2+1^2],$$

sau:

$$Q(x)=(p-1)x^{p-2}+(3p-4)x^{p-2}+\cdots$$

$$+[(k+1)(p-1)+k(p-2)+\cdots$$

$$\cdots+2(p-k-2)+(p-k-1)]x^{p-k-2}+\cdots$$

$$\ldots+\frac{p(p-1)\,(2p-1)}{6}.$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Marteş Grigore* (lic. Milit., Chişinău), *Mihalcea N* (lic. Beiuş), *Pâslariu Vasile* (lic. Bârlad), *Predoescu M. Traian* (lic. Milit., Craiova), *Vancu Ioan* (conductor technic) şi *Zaharescu Ilie* (lic. Milit, Iaşi).

Soluţia 2-a. In articolul *„Expresiunile restului şi câtului a două polinoame“* din „R. M. T.“, An. XIII, No. 3, pag. 28, este stabilit că restul $R(x)$ al împărţirei unui polinom de forma:

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_px^p,$$

prin $(a-x)^q$, în cazul particular $a=1$, $q=2$, este:

(2) $$R(x)=a_0-\sum_{i=0}^{p-2}(i+1)\,a_{2+i}+\left[a_1+\sum_{i=0}^{p-2}(i+2)\,a_{i+2}\right]x.$$

Dacă în (1) luăm:

(3) $$a_0=\frac{(p-1)\,p\,(2p-1}{6},\qquad a_1=-\frac{p(p^2-1)}{3}.$$

$$a_{2+i}=i+1,\qquad (i=0,1,2,\ldots,p-2),$$

avem polinomul din enunţ, care divizat prin $(1-x)^2$ sau $(x-1)^2$, dă restul (2), care în cazul nostru devine ţinând seamă de relaţiile (3).

$$R(x)=\frac{(p-1)\,p\,(2p-1)}{6}-\sum_{i=0}^{p-2}(i+1)^2+$$

$$\left[a_1+\sum_{i=0}^{p-2}(i+1)\,(i+2)\right]x.$$

Cum:

(4) $$\sum_{i=0}^{p-2}(i+1)^2=1^2+2^2+\cdots+(p-1)^2=$$

$$\frac{(p-1)\,p\,(2-1)}{6},$$

$$(5)\quad \sum_{i=0}^{p-2}(i+1)(i+2)=1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(p-1)p=$$

$$1^2+2^2+\cdots+(p-1)^2+[1+2+\cdots+(p-1)]$$

$$=\frac{(p-1)p(2p-1)}{6}+\frac{p(p-1)}{2}=$$

$$\frac{p(p-1)(2p-1+3)}{6}=\frac{p(p^2-1)}{3}\cdot$$

In virtutea relaţiilor (4) şi (5), rezultă că:

$$R(x)=0,$$

adică polinomul dat in enunţ, se divide prin $(x-1)^2$.

In acelaşi articol menţionat mai sus, la pag. 30, formula (17), găsim că expresiunea câtului împărţirei unui polinom de forma (1) prin $(a-x)^q$, în cazul particular $a=1$, $q=2$, este:

$$(6)\quad Q(x)=a_p x^{p-2}+(a_{p-1}+\Gamma_2^1 a_p)x^{p-3}+$$

$$(a_{p-2}+\Gamma_2^1 a_{p-1}+\Gamma_2^2 a_p)x^{p-4}+\cdots+(a_2+\Gamma_2^1 a_3+$$

$$\Gamma_2^2 a_4+\cdots+\Gamma_2^{p-2}a_p),$$

unde:

$$\Gamma_2^k=\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(k+1)}{k!}=k+1.$$

Dacă în (1), înlocuim coeficienţii cu valorile lor date de relaţiile (3), obţinem polinomul din enunţ, iar câtul împărţirei lui, prin $(x-1)^2$ este dat de (6), în care evident a_0, $a_1,\ldots a_p$, trebuesc înlocuiţi cu valorile lor din (3), astfel obţinem:

$$Q(x)=(p-1)x^{p-2}+[p-2+2(p-1)]x^{p-3}+$$

$$[(p-3)+2(p-2)+3(p-1)]x^{p-4}+\cdots$$

$$\cdots+[1^2+2^2+\cdots+(p-1)^2],$$

sau:

$$Q(x)=(p-1)x^{p-2}+(3p-4)x^{p-3}+$$

$$(6p-10)x^{p-4}+\cdots+\frac{(p-1)p(2p-1)}{6},$$

care este cătul cerut.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Predoescu I. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Sămbotin Gh.* (Sub-Lt) şi *Tica P. Marin-Galt* (Sub-Lt.)

1196. — *Se consideră un patrat* A B C D *cu latura a. Se duce diagonala* A C. *O paralelă la latura* B C *întâlneşte dreptele* A B, A C, C D *respectiv în* L, M, N.

1°. *Să se determine poziţia acestei paralele, astfel ca rotind patratul în jurul laturei* C D, *volumul născut prin rotirea triunghiului* A L M *să fie egal cu volumul născut prin rotirea triunghiului* M N C.

2°. *Aceiaşi problemă, când se înlocueşte diagonala* A C *cu sfertul de cerc, cuprins în patrat, cu centrul în* D *şi de rază a.*

N. Botea

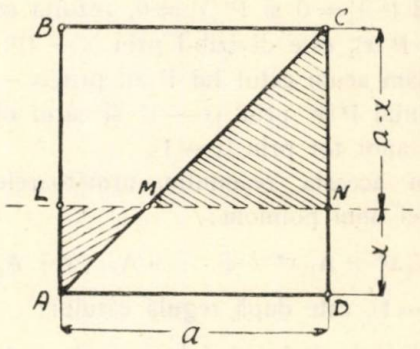
1°. Insemnăm cu V_1, V_2 şi V_3, volumele obţinute prin rotaţia în jurul lui C D a triunghiului A L M, a triunghiului M N C şi a trapezului A M N D.

Fie $DN=x$. Conform enunţului trebue să avem:

$$V_1=V_2.$$

Adăogând în ambii membrii pe V_3, obţinem:

$$(1)\quad V_1+V_3=V_2+V_3.$$



Dar pe figură se observă că V_1+V_3, este volumul cilindrului obţinut prin rotaţia în jurul lui C D, a dreptunghiului A L N D, deci:

$$(2)\quad V_1+V_3=\pi a^2 x;$$

de asemeni se observă că V_2+V_3, este volumul conului obţinut prin rotaţia în jurul lui C D a triunghiului A C D, deci:

$$(3)\quad V_2+V_3=\frac{\pi a^2\cdot a}{3}=\frac{\pi a^3}{3}\cdot$$

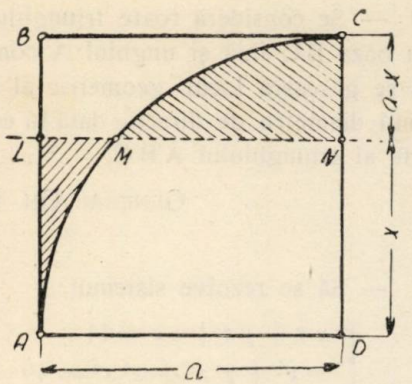
In virtutea relaţiei (1), membrii întâi din egalităţile (2) şi (3) sunt egali, rezultă că şi membri al 2-lea sunt egali, adică:

$$\pi a^2 x=\frac{\pi a^3}{3},$$

de unde:

$$x=\frac{a}{3}\cdot$$

2°. Insemnând prin W_1, W_2, W_3 volumele obținute prin rotația în jurul lui C D, a triunghiurilor curbilinii A L M, M N C și a trapezului curbilin A M N D și D N = x, putem scri conform enunțului:



$$W_1 = W_2$$

sau și:

(4) $$W_1 + W_3 = W_2 + W_3.$$

Dar:

(5) $$W_1 + W_3 = \pi a^2 x,$$

fiind, cum se observă volumul cilindrului obținut prin rotația dreptunghiului A L N D.

Asemeni:

(6) $$W_2 + W_3 = \frac{2\pi a^3}{3},$$

având volumul unei jumătăți de sferă, obținut prin rotația în jurul lui C D a sfertului de cerc A C D.

Primii membrii din (5) și (6) sunt egali în virtutea egalității (4), astfel că rezultă:

$$\pi a^2 x = \frac{2\pi a^3}{3},$$

de unde:

$$x = \frac{2a}{3}.$$

Soluții date de d-nii: *Bucur Virgil* (lic. Milit., Iași), *Budeanu C-tin* (București), *Chiriac C-tin* (Școala Pregăt. de Ofițeri), *Cojocaru M.*, *Enăsescu D.* (lic. Milit, Iași), *Geier Alfred* (student, Cluj), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Ghiocel Vasile* (bacalaureat, Giurgiu), *Grumăzescu Mircea* (Șc. Pregăt. de Ofițeri), *Mazilu Panait* (bacalaureat, Iași), *Millea E.* (Sub-Lt.), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Papazian Eduard* (lic. Eminescu, București), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Porecki B.*, *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (Șc. Polit., Timișoara), *Șabac Gh. I.* (lic. Milit. N. Filipescu), *Șușală Gh.* (lic. Milit, Chișinău) și *Vancai Ion* (conductor technic).

1276. — *Dacă a, b, c sunt laturile unui triunghiu dreptunghiu și dacă notăm:*

$$A = \frac{b}{b+c}, \qquad B = \frac{b}{a+b+c},$$

atunci avem identitatea:

$$A = \frac{2B(1-B)}{1-2B^2}.$$

V. ALACI

Ținând seamă de valoarea lui B, apoi de relația:

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

ce există într'un triunghiu dreptunghiu precum și de valoarea lui A, putem scri succesiv:

$$\frac{2B(1-B)}{1-2B^2} = \frac{\frac{2b}{a+b+c}\left(1-\frac{b}{a+b+c}\right)}{1-\frac{2b^2}{(a+b+c)^2}} =$$

$$\frac{2b(a+c)}{[(a+b+c)^2-b^2]-b^2} = \frac{2b(a+c)}{(a+2b+c)(a+c)-b^2} =$$

$$\frac{2b(a+c)}{(a+2b+c)(a+c)-(a^2-c^2)} = \frac{2b}{a+2b+c-a+c}$$

$$= \frac{2b}{2(b+c)} = \frac{b}{b+c} = A.$$

Astfel identitatea cerută este stabilită.

Soluții date de d-nii: *Amărăscu M.* (lic. Buzești, Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit. N. Filipescu), *Apostol Valeriu* (lic. Milit., Cernăuți), *Bacârea Alexandru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Birek Vasile* (lic. Beiuș), *Bogdan Andriescu-Cale* (lic. Internat, Iași), *Boitan Nicolaie* (lic. Milit., Cernăuți), *Budeanu C-tin* (Șc. Polit., București), *Burghelea Stelian* (lic. Milit., Cernăuți), *Cazanacli P.* (Iași), *Cârjă Vasile* (lic. Milit., Cernăuți), *Căşoeanu Carol* (lic. Milit., Cernăuți), *Cehan Gh. Aristide* (lic. Milit., Cernăuți), *Chiriac I. C.* (Șc. Pregăt. de Ofițeri), *Chiriac I. Simion* (lic. Huși), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Coandă I. Virgil* (Șc. Pregăt. de Ofițeri). *Cosma V. Bediceanu* (lic. Milit., Cernăuți), *Dobrescu P.* (lic. Milit. N. Filipescu), *Dumiştrascu R. Romeo*, *Dumitrescu Floricâ* (lic. Milit., Cernăuți), *Dumitrescu Stelian* (lic. Milit., Cernăuți), *Ferencz Tiberiu* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chișinău), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Galan I. Ioan* (lic. Milit., Cernăuți), *Gheorghiu Emilian* (lic. Milit, Cernăuți), *Ghervescu V.* (lic. Bacău), *Godeanu I. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Grumăzescu Mircea* (Șc. Milit., de Artilerie), *Haret I. C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Hompolă T.* (lic. Beiuș), *Hristache Virgil* (lic. Milit., Cernăuți), *Iliescu D-tru* (lic. Milit., Cernăuți), *Mafleiu C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Marnea Desideriu* (lic. Beiuș), *Marin Ioan* (lic. Milit., Cernăuți), *Mărgărint*

Gh. (lic. Milit., Cernăuți), *Mihalcea Octavian* (Buzău), *Mihalcea N.* (lic. Beiuș), *Millea G. E.* (Sub-Lt), *Miron Virgil* (lic. Milit, Cernăuți), *Mocanu Vasile* (lic. Milit., Cernăuți), *Murgu M.* (lic. Beiuș), *Muscinschi Georges* (l.c. Milit., Cernăuți), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Panait Mircea*, *Pană Petre* (lic. Milit, N. Filipescu), *Pădurariu Nicolae* (lic. Milit, Cernăuți), *Pun Nicolae* (Șc Polit., Timișoara), *Petrescu Anastasie* (Craiova), *Petrescu C. Octavian* (lic. Internat, Iași), *Pompeiu Marica* (l c. Beiuș), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Popescu Greacă Vlad* (lic. Milit, Cernăuți), *Pupăzan C-tin* (Tg-Jiu), *Roman Nicolae* (lic. Milit, Cernăuți), *Sămbotin Gh.* (Sub-Lt), *Săvulescu Spirea*, *Ședlovschi Artimon* (lic. Milit., Cernăuți), *Stănciulescu Gh.* (lic. Milit, Cernăuți), *Strohal Rolf Tanasiciuc Claudius* (lic. Milit., Cernăuți, *Țighiliu Radu* (lic. Milit, Cernăuți), *Trăsnitu Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Țițeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu), *Vasilescu A Gh.* (lic. Milit., Cernăuți), *Vasileshu Nicolae-Jiu* (lic. Milit, Cernăuți), *Vasiliu Kiki* (lic. Milit., Cernăuți), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuți), *Verenca Silviu* (lic. Milit, Cernăuți), *Vlad I. M.* (student, Cluj), *Weismann Lipa.*

PROBLEME PROPUSE

1377. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, egal cu produsul sumei cifrelor sale prin cifra din stânga și prin numărul format de cele trei cifre din dreapta.

V. THÉBAULT

1378. — Fie triunghiul A B C de ortocentru H înscris în cercul O. M un punct oarecare pe tangenta în A la cercul O și M_1, M_2 proecțiele lui M pe A B și A C. Dreapta $M_1 M_2$ tae pe B C în pe B C în P și fie Δ tramversala reciprocă a lui $M_1 M_2$ față de A B C. (Δ tae pe A C și B C respectiv în D și E, astfel ca, $CD = AM_2$ și $EC = BP$). Să se demonstreze că:

1°. $M_1 M_2$ este perpendiculară pe B C.

2°. H P este perpendiculară pe dreapta Δ.

LOCOT. A. I. STAN

1379. — A', B', C' fiind punctele unde trei ceviene concurente taie cercul circumscris triunghiului A B C, iar M, N, P picioarele bisectoarelor interioare unghiurilor A', B', C' din triunghiurile B A' C, C B' A, A C' B, să se arate că dreptele A M, B N, C P sunt concurente.

M. C POSTELNICESCU

1380. — Se consideră toate triunghiurile A B C care au baza B C fixă și unghiul A constant și se cere să se găsească locul geometric al extremităților unui diametru de direcție dată în cercul celor 9 puncte al triunghiului A B C.

GENERAL GH. BUICLIU

1381. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 11 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 49 \\ x^3y^3 + y^3z^3 + z^3z^3 = 251 \end{cases}$$

DUMITRU ȚARALUNGA

1382. — Să se demonstreze că rădăcinele ecuației:

$$[(2+3i)x + (3+2i)\sqrt{13-x^2}]^{2n} - 169^n = 0,$$

(unde $i = \sqrt{-1}$),

sunt:

$$x = 2\cos\frac{k\pi}{n} + 3\sin\frac{k\pi}{n}, \quad [k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1]$$

V. ALACI

1383. — Să se rezolve ecuația:

$$\sin px + \cos px = \sin px \cos px.$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

1384. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se arate că:

1°. Dacă laturile lui sunt în progresie aritmetică, atunci și $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ sunt în progresie aritmetică.

2°. Dacă patratele laturilor lui sunt în progresie aritmetică, atunci și cot A, cot B, cot C sunt în progresie aritmetică.

CEZAR IVANESCU

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru :

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

ANUL XV. 15 MAIU 1935 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. THÉBAULT: SUR LES BISSECTRICES DU TRIANGLE.

2. N. O. ZAHARIA: DOMENIUL MATEMATICILOR IN CLASIFICAREA LUI AUGUSTE COMTE. (urmare și sfârșit)

3. NOTE MATEMATICE: 5, 6.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 199, 1273, 1277, 1278, 1310.

6. PROBLEME PROPUSE: 1385-1392.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR LES BISSECTRICES DU TRIANGLE

PAR

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

Les expressions des distances des pieds des bissectrices intérieures d'un triangle que nous avons données[1], peuvent s'obtenir plus simplement en utilisant des propriétés du triangle dues à *J. Neuberg* et *A. Gob.*[2]

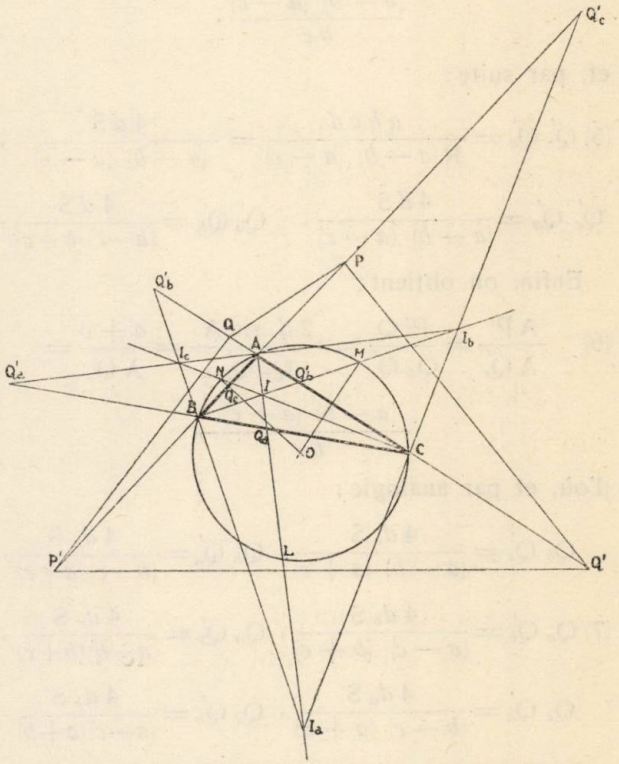
1. Soient un triangle ABC, ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$); Q_a, Q_b, Q_c et Q'_a, Q'_b, Q'_c les pieds des bissectrices intérieures et extérieures; (O) le cercle circonscrit de rayon R; (I), (I_a), (I_b), (I_c) les cercles inscrit et exinscrits; S l'aire du triangle. Posons $OI = d$, $OI_a = d_a$, $OI_b = d_b$, $OI_c = d_c$.

Les bissectrices AI, BI, CI, par exemple, rencontrent le cercle (O) aux sommets d'un triangle LMN dont ces droites sont les hauteurs. Il suit de la que trois forces représentées par OL, OM, ON ont une résultante représentée par OI. Si nous prenons sur BA, CA les longueurs $BP = CQ = BC$, la droite PQ est la résultante des trois vecteurs PB, BC, CQ, égaux entre eux et perpendiculaires, respectivement, à ON, OL, OM; donc PQ *est perpendiculaire à* OI, et:

$$(1) \qquad \frac{PQ}{OI} = \frac{BC}{OL} = 2 \sin A.$$

On conclut de là que OI *est égal au rayon du cercle circonscrit au triangle* APQ.

On montre de la même façon que si l'on prend sur les prolongements de AB, AC des longueurs $BP' = CQ' = BC$, *les rayons des cercles circonscrits aux triangles* $AP'Q'$, APQ', $AP'Q$ *sont égaux aux distances des points* O *et* I_a, O et I_b,



O *et* I_c *et les droites* $P'Q'$, PQ', $P'Q$ *sont perpendiculaires aux droites* OI_a, OI_b, OI_c.[1]

Dès lors, les droites PQ, $P'Q'$, PQ', $P'Q$ sont respectivement parallèles aux droites:

$$\Delta \equiv (Q'_a, Q'_b, Q'_c), \qquad \Delta_a \equiv (Q'_a, Q_b, Q_c),$$

$$\Delta_b \equiv (Q_a, Q'_b, Q_c), \qquad \Delta_c \equiv (Q_a, Q_b, Q'_c),$$

et, en vertu de[1] :

$$(2) \qquad \frac{AQ'}{AQ_b} = \frac{P'Q'}{Q_b Q_c} = \frac{2 d_a \sin A}{Q_b Q_c} = \frac{a+b}{AQ_b} =$$

[1] *Revista Matematica*, XV, p. 3.

[2] *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 1889.
Nous avons généralisé ces thèorèmes, (*Gazeta Matematică*, XXXVI — 361). (V. T.)

[1] *J. Neuberg*, loc. cit.

$$\frac{(a+b)\,(a+c)}{b\,c},$$

d'où, puis par analogie :

$$(3)\quad Q_b\,Q_c = \frac{a\,b\,c\,d_a}{R\,(a+b)\,(a+c)} = \frac{4\,d_a\,S}{(a+b)\,(a+c)},$$

$$Q_c\,Q_a = \frac{4\,d_b\,S}{(a+b)\,(b+c)},\quad Q_a\,Q_b = \frac{4\,d_c\,S}{(a+c)\,(b+c)}.$$ [2]

2. On a aussi :

$$(4)\quad \frac{A\,Q}{A\,Q_b'} = \frac{P\,Q}{Q_b'\,Q_c'} = \frac{2\,d\sin A}{Q_b'\,Q_c'} = \frac{a-b}{A\,Q_b'} = \frac{(a-b)\,(a-c)}{b\,c},$$

et, par suite :

$$(5)\quad Q_b'\,Q_c' = \frac{a\,b\,c\,d}{R\,(a-b)\,(a-c)} = \frac{4\,d\,S}{(a-b)\,(a-c)},$$

$$Q_c'\,Q_a' = \frac{4\,d\,S}{(a-b)\,(a-c)},\quad Q_a'\,Q_b' = \frac{4\,d\,S}{(a-c)\,(b-c)}.$$

Enfin, on obtient :

$$(6)\quad \frac{A\,P'}{A\,Q_c'} = \frac{P'\,Q}{Q_b\,Q_c'} = \frac{2\,d_c\sin A}{Q_b\,Q_c'} = \frac{a+c}{A\,Q_c'} = \frac{(a-b)\,(a+c)}{b\,c},$$

d'où, et par analogie :

$$Q_b\,Q_c' = \frac{4\,d_c\,S}{(a-b)\,(a+c)},\quad Q_b\,Q_a' = \frac{4\,d_a\,S}{(b-c)\,(a+c)},$$

$$(7)\quad Q_a\,Q_b' = \frac{4\,d_b\,S}{(a-c)\,(b+c)},\quad Q_a\,Q_c' = \frac{4\,d_c\,S}{(a-b)\,(b+c)},$$

$$Q_c\,Q_a' = \frac{4\,d_a\,S}{(b-c)\,(a+b)},\quad Q_c\,Q_b' = \frac{4\,d_b\,S}{(a-c)\,(a+b)}.$$

3. Si nous prenons sur A B et C B des longueurs A U = C V = C A, puis sur B C et A C des longueurs B X = A Y = A B, les droites U V et X Y, respectivement parallèles aux droites $Q_c'\,Q_a'$ et $Q_a'\,Q_b'$, sont perpendiculaires à la droite I O. On déduit ainsi, directement, la collinéarité des points (Q_a', Q_b', Q_c') et par un raisonnement similaire celles des points (Q_a', Q_b, Q_c), (Q_a, Q_b', Q_c), (Q_a, Q_b, Q_c').

[2]) *V. Thébault, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 1934, 149.

DOMENIUL MATEMATICILOR IN CLASIFICAREA LUI AUGUSTE COMTE

DE N. O. ZAHARIA

(urmare și sfârșit)

Însfârșit ultima ramură, care a mai rămas să o trecem în revistă, este *mecanica*. Ceeace trebue să spunem dela început este că în aceste ultime patru lecții ale *Cursului* rezidă — tot atât cât și în cele ce se referă la geometrie — fundamentele filosofiei matematice pozitive a lui *A. Comte*. Noi vom avea în vedere deocamdată numai diviziunile mecanicei, reținând din lecțiunea a XV-a numai enunțarea principiilor de bază, fără a le supune vreunei încercări de critică.

Cele trei legi pe cari le vom enumera mai jos, furnizează o bază reală teoriilor acestei științe. Principiul *inerției (Kepler)*, al *egalității acțiunii și reacțiunei (Newton)* și al *independenții mișcărilor* (compunerea mișcărilor, *Galileu)* fiind legi precise și foarte simple, sunt susceptibile de a fi exprimate prin ecuații ușor de obținut. Și, ca urmare, întreaga mecanică a mișcărilor uniforme și a forțelor instantanee, poate fi tratată ca o consecință a acestor legi. Cât despre mecanica mișcărilor variate și a forțelor accelerate e nevoie de intervenția calculului infinitezimal.

Prima diviziune în domeniul mecanicei se efectuează imediat : *statica* își propune studierea condițiilor de echilibru și *dinamica* are drept studiu legile de mișcare. Dinamica este mai generală decât statica, deoarece aceasta din urmă poate fi redusă la un caz particular al primei, când se consideră numai mișcările uniforme. Deasemenea, se poate spune că statica este mai simplă, deoarece ea face abstracții de timp, — care este elementul determinant al dinamicei.

Studiul general al mecanicei poate fi conceput deci în două maniere, după cum statica este considerată ca o știință aparte, sau ca un caz particular al dinamicei ; în cea de a doua înfățișare, întreaga mecanică se va reduce la studiul dinamicei — aceste două cuvinte însemnând atunci același lucru — deoarece statica nu va mai fi decât un simplu capitol, acela al mișcării nule.

Studiul echilibrului constituia deja o știință încă

depe vremea rezultatelor lui *Arhimede*; dinamica este creaţia lui *Galileu*.

Concomitent şi subordonată fiecăreia din cele două ramuri de mai sus avem o altă diviziune, dupăcum se studiază solidele sau fluidele. Evident, pe vremea lui *A. Comte* mecanica acestora din urmă era încă în faşe, — departe de a fi intrevăzut remarcabilele rezultate ale sfârşitului secolului trecut şi inceputului celui în care ne găsim.

Revenind, în lecţiunea XVI-a, asupra raporturilor dintre statică şi dinamică, *A. Comte* arată dificultăţile constituirii primei, pe bază de particularizări ale teoremelor celei de a doua. Dificultatea teoretică cea mai importantă constă în aceea că, astfel prezentată, ştiinţa mecanicei se înfăţişază ca o înlănţuire eterogenă de teoreme ce se sprijină pe fundamente deosebite. Ceeace iar putea da un caracter de unitate şi deci de perfecţie, ar fi stabilirea unui principiu unic, care să fundamenteze în acelaş timp ambele ramuri. Această unitate filosofică a fost realizată de *Lagrange* în tratatul său, *Mecanica analitică*. De aci inainte, statica se va prezinta ca o disciplină ce-şi clădeşte teoremele independent cu ajutorul unui singur principiu, al lui *D'Alembert*. Iar silinţele lui *Lagrange* converg în scopul de a funda dinamica pe studiul staticei; adică de a o reduce la aceasta. Această metodă de tratare este universal recunoscută şi astăzi. Toate chestiunile de dinamică, chiar cele mai importante şi mai dificile, sunt aduse la probleme de echilibre. Principiul lui *D'Alembert*, permite de a transforma într'o problemă de echilibru, orice chestiune de mişcare. De aci necesitatea de a fi tratată direct ştiinţa echilibrului, statica.

Combinând *principiul iuţelilor virtuale (Galileu, J. Bernoulli)* cu acel al lui *D'Alembert, Lagrange* a stabilit o teoremă din care se poate deduce întreaga mecanică raţională.

Alături de aceste două principii, în ce priveşte statica, *Comte* dă o mare importanţă teoriei cuplurilor *(Poinsot)*.

Una din cele două metode permite stabilirea celor şase ecuaţii ale echilibrului. Se menţionează apoi cazurile când numărul ecuaţiilor este mai mic: corp învărtindu-se în jurul unui punct fix (trei ecuaţii), fixat de trei puncte nu în linie dreaptă (nici o ecuaţie, echilibrul existând necesar); sau, supus să rămână pe curbe sau suprafeţe date. Metoda, care duce mai sigur la rezultat în aceste cazuri, este cea statică, fundată pe principiul iuţelilor virtuale.

Insfârşit, o chestiune importantă în statică, este *teoria centrelor de greutate,* a cărei soluţie, deşi de natură geometrică, îşi are locul, din cauza întrebuinţării speciale care i se dă, în mecanică; rezolvarea complectă, cere întrebuinţarea calculului infinitezimal, dificultatea constând în forma corpului considerat.

Obiectul dinamicei fiind studiul mişcărilor variate produse de forţele *continui* (accelerate), aceste mişcări vor trebui să fie măsurate. Pentru aceasta, prin analogie cu ceeace s'a spus la teoria contactelor curbelor în geometrie, va fi nevoie de termeni de comparaţie. Pe aceştia *Comte* îi caută numai în apropiata vecinătate a observaţiei. De aci concluzia, că singure mişcarea uniformă şi mişcarea uniform variată (a cărei prototip este gravitatea) pot fi aplicate cu cucces la măsurarea celoralte mişcări variate rectilinii.

Comte trece apoi la mişcarea curbilinie, arătând cum se pot stabili ecuaţiile în termeni finiţi, sau ecuaţiile cari dau acceleraţia totală, — aşa cum se procedează în problema lui *Kepler,* din care se deduce legea gravitaţiei universale. Când se cere ca punctul să rămână incontinuu, în mişcarea sa, pe o curbă dată, se scoate în evidenţă forţa centrifugă, situată în fiecare moment pe normala la curbă, din planul osculator şi egală în valoare cu raportul dintre patratul iuţelii prin rază de curbură.

Pentru studiul mişcării unui sistem de corpuri legate între ele de o manieră oarecare, se face să intervină o nouă noţiune: *cantitatea de mişcare.* De aci înainte intervine principiul lui *D'Alembert,* care face din problema mişcării, o problemă de echilibru. Combinând acest principiu cu acel al iuţelilor virtuale, *Lagrange* a redus la un singur principiu intreaga dinamică. In definitiv, analiza mişcării unui sistem acţionat de forţe oarecari, se imparte în două: 1° determinarea, la fiece moment a iuţelii centrului de greutate şi direcţiunii în care acesta se mişcă; 2° determinarea, la fiece moment, a direcţiei axei instantanee de rotaţie, care trece prin centrul de greutate şi iuţeala de rotaţie a fiecărei părţi a sistemului în jurul acestei axe.

Lecţiunea XVIII-a a *Cursului* este rezervată criticei teoremelor generale ale mecanicei, critică pe care *Comte* o face prin prisma mecanicei analitice a lui *Lagrange*. Sunt trecute în revistă: 1°. statică: principiul lui *Torricelli*, relativ la echilibrul corpurilor grele, generalizat de *Maupertius*; 2°. dinamică: principiul conservării mişcării centrului de greutate *(Newton)*; principiul ariilor *(Kepler)*; teoremele relative la momentele de inerţie şi la axele principale de rotaţie; teorema conservării forţelor vii *(Huyghens, D. Bernoulli)*; teorema celei mai mici acţiuni *(Maupertius, Lagrange)*; teorema coexistenţei micilor oscilaţiuni *(D. Bernoulli)*.

Iată o schiţă sinoptică a domeniului matematicilor, aşa cum rezultă din consideraţiile cuprinse în primul volum al *Cursului de filosofie pozitivă*:

- (Analiza) *Matematicile abstracte* (calculul)
  - *Calculul funcţiunilor*
    - (Analiza ordinară) *Algebra propriu zisă*
      - Ecuaţiile de primele patru grade, binoame, etc.
      - Rezolvarea numerică a ecuaţiilor.
      - Teoria ecuaţiilor.
    - (Analiza transcend.) *Calc. infinitezimal* (Calc. funcţ. indirecte)
      - Calculul diferenţial
        - funcţii explicite
          - 1 variabilă
          - *n* variabile
        - „ implicite
          - I d e m.
      - Calculul integral — I d e m.
  - *Calculul variaţiilor.*
  - *Calculul cu diferenţe finite.*
  - *Calculul valorilor*
    - Aritmetica propriu zisă
    - Tabele de logaritmi şi tabele trigonometrice
    - Integrale definite
    - Teoria numerelor
- *Matematicile concrete*
  - *Geometria*
    - *Geometria elementară* (Specială)
      - Geometria propriu zisă
        - 2 dimensiuni
        - 3 dimensiuni
      - Geometria descriptivă
      - Trigonometria
    - *Geometria analitică* (Generală)
      - Cu două dimensiuni
      - Cu trei dimensiuni
      - Calcul algebric
      - Calcul diferenţial
      - Calcul integral
  - *Mecanica*
    - *Statică*
      - Corpuri solide
      - Hidrostatică
    - *Dinamică*
      - Corpuri solide
      - Hidrodinamică.

NOTE MATEMATICE

5. — *Sur le triangle dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle.*

Soient Q_a, Q_b, Q_c et Q'_a, Q'_b, Q'_c les pieds des bissectrices intérieures et extérieures d'un triangle A B C sur les côtés B C = a, C A = b, A B = c.

Des relations connues:

$$A\,Q_b : Q_b\,C = c : a, \qquad Q_c\,A : B\,Q_c = b : a,$$

$$(1) \qquad C\,Q_a = a\,b : (b + c),$$

$$Q_a\,B = a\,c : (b + c), \qquad A\,Q_a = 2\,b\,c \cos\frac{A}{2},$$

on déduit que:

$$(2) \qquad A\,Q_a : C\,Q_a = 2\,c : a \cos\frac{A}{2},$$

et, par analogie, que:

$$(3) \qquad A\,Q_a : Q_a\,B = 2\,b : a \cos\frac{A}{2}.$$

Pour que l'on ait:

$$2\,c : a \cos\frac{A}{2} = A\,Q_a : Q_a\,C = A\,Q_b : Q_b\,B = c : a$$

et :

$$2b : a\cos\frac{A}{2} = AQ_a : Q_aB = Q_cA : BQ_c = b : a,$$

il faut donc que :

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{soit} \quad A = 120^0.$$

Réciproquement, si l'angle A d'un triangle ABC vaut 120° :

$$\frac{1}{AQ_a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$ [1]

et :

$$AQ_a = bc : (b + c).$$

On a donc :

$$AQ_a : CQ_a = c : a = AQ_b : Q_bC$$
$$AQ_a : Q_aB = b : a = Q_cA : BQ_c.$$

Dans un triangle ABC, *dont les pieds des bissectrices intérieures sont* Q_a, Q_b, Q_c, *la condition nécessaire et suffisante pour que les droites* Q_aQ_b *et* Q_aQ_c *bissectent les angles formés par le côté* BC *et la bissectrice* AQ_a, *est que l'angle* A *égale* 120°.

Lorsque cette condition est remplie, le triangle $Q_aQ_bQ_c$ *est rectangle en* Q_a, et en la rapprochant de celle que nous avons déjà signalée [2], on peut dire que *si dans un triangle* ABC *les droites* Q_aQ_b et Q_aQ_c *bissectent les angles formés par le côté* BC *et la bissectrice* AQ_a, *le triangle* Q_a, Q_b, Q_c *est rectangle en* Q_a, *et réciproquement.*

N. B. Dans le triangle spécial où $A = 120^0$, *les centres des cercles inscrit et exinscrit dans les triangles* Q_aAC *et* Q_aBA *sont situés sur les droites* Q_aQ_b et Q_aQ_c.

V. THÉBAULT

6. — *Asupra unor relaţii trigonometrice.*

In *Gazeta Matematică* Anul XXXVIII, Numerile 2 şi 7, D-nii *V. Thébault* şi *Gh. Gheorghiu* arată, cum se pot exprima expresiile simetrice în raport cu laturile a, b, c ale unui triunghiu în funcţie de semiperimetru, raza cercului înscris şi circumscris, adică p, r şi R. Cu modul acesta, D-lor au stabilit câteva relaţii interesante, între elementele unui triunghiu.

In cele ce urmează îmi propun, urmând aceiaşi metodă, să extind rezultatele obţinute în *Gazeta Matematică* şi să arăt mai general că, în afară de laturi, orice expresie simetrică în raport cu razele cercurilor exînscrise r_a, r_b, r_c ale unui triunghiu sau în raport cu înălţimile h_a, h_b, h_c ale triunghiului, poate fi exprimată în funcţie de p, r şi R.

Ca aplicaţii vor rezulta relaţii remarcabile între elementele triunghiului.

In numerile citate din *G. M.* se stabileşte că ecuaţia :

$$(1) \quad x^3 - 2px^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr) - 4prR = 0,$$

are ca rădăcini laturile a, b, c. Prin urmare orice expresie simetrică în raport cu a, b, c se poate exprima cu ajutorul coeficienţilor ecuaţiei (1), deci în funcţie de p, r şi R.

Pentru scopul ce urmărim vom formă deci ecuaţiile, cari admit ca rădăcini respectiv pe r_a, r_b, r_c şi h_a, h_b, h_c.

Aceste ecuaţii sunt :

$$(2) \quad x^3 - (r_a + r_b + r_c)x^2 + (r_ar_b + r_br_c + r_cr_a)x - r_ar_br_c = 0$$

$$(3) \quad x^3 - (h_a + h_b + h_c)x^2 + (h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a)x - h_ah_bh_c = 0.$$

Dar se ştie că :

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r; \quad r_ar_b + r_br_c + r_cr_a = p^2;$$
$$r_ar_br_c = p^2r$$

aşa că ecuaţia (2) devine :

$$(2') \quad x^3 - (4R + r)x^2 + p^2x - p^2r = 0.$$

La fel ţinând seamă de relaţiile :

$$h_a = \frac{bc}{2R}; \quad h_b = \frac{ca}{2R}; \quad h_c = \frac{ab}{2R};$$

$$bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr;$$
$$abc = 4RS = 4prR$$

avem :

$$h_a + h_b + h_c = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$$

$$h_ah_b + h_bh_c + h_ch_a = \frac{abc(a + b + c)}{4R^2} = \frac{2p^2r}{R}$$

$$h_ah_bh_c = \frac{a^2b^2c^2}{8R^3} = \frac{2p^2r^2}{R},$$

[1] Propriété connue.
[2] R. M. XV. 4.

încât ecuaţia (3) se scrie:

$$(3')\quad 2Rx^3-(p^2+r^2+4Rr)x^2+4p^2rx-4p^2r^2=0.$$

Ecuaţiile (2') şi (3') răspund problemei ce ne-am propus.

In adevăr, coeficienţii acestor ecuaţii fiind funcţii de p, r şi R, rezultă că orice expresie simetrică în raport cu rădăcinile uneia din aceste ecuaţii, se poate exprima cu ajutorul coeficienţilor ei, deci în funcţie de p, r şi R.

Aplicaţii. 1. Ca o aplicaţie imediată, să calculăm pentru ecuaţia (2'), suma patratelor şi suma cuburilor rădăcinilor. Servindu-ne de formulele lui *Newton*, avem:

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2=(4R+r)^2=2p^2$$

(problema 1151 „R. M. T.")

Deasemeni:

$$r_a^3+r_b^3+r_c^3=(4R+r)\left[(4R+r)^2-2p^2\right]+3p^2r-p^2(4R+r)=(4R+r)^3-12p^2R,$$

identitate ce face obiectul problemei 1128 din „R M. T.".

Să calculăm expresia:

$$E=r_a^2(r_b+r_c)+r_b^2(r_c+r_a)+r_c^2(r_a+r_b).$$

Ea se poate scri:

$$(r_a+r_b+r_c)(r_a^2+r_b^2+r_c^2)-(r_a^3+r_b^3+r_c^3).$$

Şi ţinând seama de cele stabilite mai sus avem:

$$E=(4R+r)\left[(4R+r)^2-2p^2\right]-\left[(4R+r)-12p^2R\right]=2p^2(2R-r).$$

Rezultă deci identitatea:

$$r_a^2(r_b+r_c)+r_b^2(r_c+r_a)+r_c^2(r_a+r_b)=2p^2(2R-r).$$

2. Ne propunem r_a, r_b, r_c fiind rădăcinile ecuaţiei (2'), să formăm ecuaţia ale cărei rădăcini sunt:

$$\frac{r_a-r}{r_a},\quad \frac{r_b-r}{r_b},\quad \frac{r_c-r}{r_c}.$$

Trebuie deci să facem transformarea:

$$y=\frac{x-r}{x}\quad\therefore\quad x=\frac{r}{1-y}.$$

Făcând calculele se găseşte următoarea ecuaţie:

$$p^2y^3-2p^2y^2+(p^2+r^2+4Rr)y-4rR=0.$$

Scriind relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, avem următoarele identităţi:

$$\frac{r_a-r}{r_a}+\frac{r_b-r}{r_b}+\frac{r_c-r}{r_c}=2$$

$$\frac{(r_a-r)(r_b-r)}{r_ar_b}+\frac{(r_b-r)(r_c-r)}{r_br_c}+\frac{(r_c-r)(r_a-r)}{r_cr_a}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{p^2}$$

$$\frac{(r_a-r)(r_b-r)(r_c-r)}{r_ar_br_c}=\frac{4Rr}{p^2}.$$

3. Deasemeni, dacă ne propunem să formăm ecuaţia cu rădăcinile:

$$\frac{h_a-r}{h_a},\quad \frac{h_b-r}{h_b},\quad \frac{h_c-r}{h_c},$$

găsim că această ecuaţie este:

$$4p^2y^3-8p^2y^2+(5p^2+r^2+4Rr)y-(p^2+r^2+2Rr)=0.$$

Scriind ca şi în cazul precedent relaţiile dintre rădăcini şi coeficienţi, avem următoarele trei identităţii:

$$\frac{h_a-r}{h_a}+\frac{h_b-r}{h_b}+\frac{h_c-r}{h_c}=2$$

$$\frac{(h_a-r)(h_b-r)}{h_ah_b}+\frac{(h_b-r)(h_c-r)}{h_bh_c}+\frac{(h_c-r)(h_a-r)}{h_ch_a}=\frac{5p^2+r^2+4Rr}{4p^2}$$

$$\frac{(h_a-r)(h_b-r)(h_c-r)}{h_ah_bh_c}=\frac{p^2+r^2+2Rr}{4p^2}.$$

4. In fine ca o aplicaţie a ecuaţiei (1), ne propunem să calculăm suma:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b},$$

care se poate încă scrie:

$$\frac{a}{2p-a}+\frac{b}{2p-b}+\frac{c}{2p-c}.$$

Vom forma deci ecuaţia ale cărei rădăcini sunt date de expresia:

$$y=\frac{x}{2p-x},$$

unde se înlocueşte x respectiv prin a, b, c.

Această ecuaţie este:

$$(p^2+r^2+2Rr)y^3-2(p^2-r^2-Rr)y^2+$$
$$(p^2+r^2-2Rr)y-2Rr=0.$$

Expresia ce voim să calculăm este suma rădăcinilor acestei ecuaţii, avem prin urmare:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{2(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr}.$$

Deasemenea, celelalte relaţii dintre rădăcini şi coeficienţi conduc la următoarele identităţi remarcabile:

$$\frac{ab}{(b+c)(c+a)}+\frac{bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{ca}{(a+b)(b+c)}$$
$$=\frac{p^2+r^2-2Rr}{p^2+r^2+2Rr}$$

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{2Rr}{p^2+r^2+2Rr}.$$

Cred suficiente aceste aplicaţii, pentru a învedera cum, prin metode algebrice, se pot obţine relaţiuni interesante între elementele triunghiului.

CEZAR IVANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XL, No 8, Aprilie 1935. Dare de seamă asupra mesei comune a membrilor „*Gazetei Matematice*“ din seara zilei de 20 Februarie 1935, pentru sărbătorirea d-lui Ing. *Aurel Ioanovici*, de *N. Botea*, „Formule de *M. Botesu* de *Iassy*“, de *A. Myller*. Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu*. Asupra unor serii, de *Gh. D. Simionescu*. Despre ortopol, de *Lt. Mihail I. Focşeneanu*. Asupra unor sume trigonometrice, de *Ion V. Matieş*. Premiul „Inginer *Al. Roşu*“, de *G-l Buicliu*, *Ing. A. Ioanovici*, *Al. A. Roşu*.

2. *Revista cercului de studii al şcoalei superioare P. T. T., Timişoara*, anul IV, No. 4, Aprilie 1935. Măsurători efectuate în telegrafie, de Ing. *Ion C. Schileru*. Principiile răspunderii pentru mandatele postale şi buletinele de vărsământ-cec, de Insp. *Dr. E. Kovaci*. Unde eterice, de *C-tin Balba*. Lămuriri asupra unor contraziceri cu privire la aplicarea aranjamentului valorilor declarate, de *Gajdan Ioan*. Pagina Matematică.

3. *Stiinţă şi Progres*, revista ştiinţifică a liceelor militare, anul II, No 2, Mai 1935, Tg-Mureş. Introducere în studiul şirului lui *Fibonacci*, de *Marin Dumitrescu*. Curiosităţi din alimentaţia oamenilor, de *S. Iliuţ*. Despre vitamine, de *Buzincu Ioan*. Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Traian Lalescu*. Culegere de Probleme de geometrie descriptivă. (Ediţia 2-a, revăzută de *Dr. R. N. Raclis.*) Recomandăm călduros corespondenţilor nostrii această carte, frumos tipărită şi ingrijită, fiindu-le de un real folos prin cuprinsul ei.

5. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur certaines fonctions attachées aux fonctions métasphériques. (Extrait du „Bulletin Stiintifique de l'école polytéchnique de Timişoara, Tome 5, Fasc. 3–4).

6. *Gh. Th. Gheorghiu*. Fonctions métasphériques et leur extension. (Extras din Mathematica, Vol. X, 1935.

7. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur un cas spécial des fonctions métasphériques. (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, vol. XX, 1934).

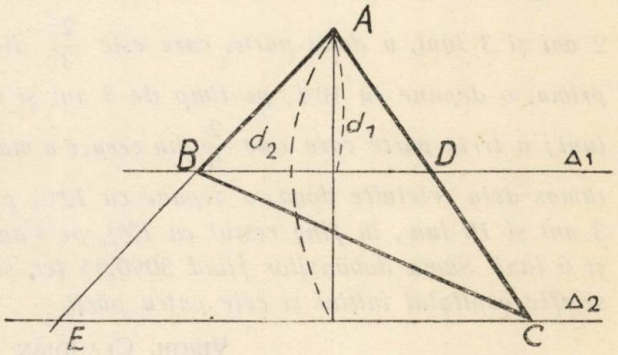
8. *Gh. Th. Gheorghiu*. Sur les fonctions métasphériques (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1934).

PROBLEME REZOLVATE

199 — *Vârful* A *al unui triunghiu* ABC *este fix, iar vârfurile* A *şi* B *se mişcă pe două drepte paralele* Δ_1 *şi* Δ_2. *Fie* D *şi* E *intersecţia lui* AC *şi* AB *respectiv cu* Δ_1 *şi* Δ_2. *Să se demonstreze că dacă suprafaţa triunghiului* ABC *este constantă, atunci lungimile* BD *şi* CE *sunt constante şi reciproc.*

GENERAL GH. BUICLIU

Fie S suprafaţa constantă a triunghiului ABC şi d_1, d_2 distanţele punctului fix A la dreptele Δ_1, Δ_2. Urmărind figura se vede că avem succesiv:



$$(1)\quad S=supr.AEC-supr.BEC=\frac{1}{2}[EC.d_2-$$
$$EC(d_2-d_1)]=\frac{1}{2}d_1.EC,$$

care arată că EC este constant. La fel:

$$(2)\quad S=supr.ABD+supr.BCD=\frac{1}{2}[BD.d_1+$$
$$BD(d_2-d_1)]=\frac{1}{2}d_2.BD,$$

care arată că BD este constant. Pentru alte dispoziţiuni de figură se ajunge la acelaşi rezultat.

Reciproc, dacă E C şi B D sunt constante, rezultă din (1) şi (2) că S este constantă.

Soluţie analoagă dată de d-nii: *Adam I. M.* (Constanţa), *Atanasiu I. D.* (lic M. Dealu), *Bărglăzan A.* (lic. Gh. Lazăr, Sibiu), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea Gh. N.* (Bucureşti), *Brătescu H. M.* (R.-Vâlcea), *Cocorandu M.* (Braşov), *Coşereanu I.* (Piatra Neamţ), *Cristescu V.* (Piteşti), *Dorneanu S. V.* (lic Internat, Iaşi), *Dospinoiu N.*, *Florea C. Al.* (lic Internat, Iaşi), *Gabrielescu C. V* (lic. Bălcescu, Brăila), *Georgescu-Val N. I.* (Timişoara), *Gheorghiu Gh. L.* (lic. Naţional, Iaşi), *Lepădatu I. V.* (lic. Internat, Iaşi), *Lăzărescu F. St.* (lic. Maiorescu, Giurgiu), *Manolescu I. N.* (lic. Focşani), *Marinescu M. I.* (lic. Mânăstirea Dealu), *Mihăescu D. C.* (lic. Giurgiu), *Mihăileanu N. N.* (student), *Negretzu I. F.* (lic. Piteşti), *Nesţianu Gh. Gh.* (lic. Mânăstirea Dealu), *Nicotescu I.* (lic. Ploeşti), *Niculescu Alex.* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Pincu K.* (lic. comunităţii israelite, Galaţi), *Popea Gh. O.* (lic. Hajdeu, Chişinău), *Popovici A.* (Focşani), *Popovici C. C.* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. I.*, *Popovici-Puiu D.* (Târgovişte), *Silion Gh. I.* (lic. Câmpina), *Scodrano Al.* (lic. Durostor), *Stănciulescu G.* (Piteşti), *Tauber Al.* (Botoşani), *Udrisky T.* (lic. Arad) şi *Weiss L.* (lic. Alexandri, Galaţi).

Soluţii mai complicate sau prin geometria analitică, de la d-nii: *Bobârnac M.*, *Gheorghiu Th. Gh.*, *Petrovici D.* şi *Tărăbuţă C. P.*

1273. — *Cineva depune un capital al său, împărţindu-l în patru părţi. Prima parte care este* $\frac{1}{2}$ *din capital, o depune cu* 5% *pe timp de 2 ani şi 3 luni, a doua parte, care este* $\frac{2}{3}$ *din prima, o depune cu* 10% *pe timp de 3 ani şi 6 luni; a treia parte care este* $\frac{2}{5}$ *din ceeace a mai rămas dela celelalte două, o depune cu* 12% *pe 3 ani şi 10 luni, în fine restul cu* 15% *pe 4 ani şi 6 luni. Suma dobânzilor fiind 3090,35 lei, să se afle capitalul iniţial şi cele patru părţi.*

VIRGIL CLAUDIAN

Prima parte este $\frac{1}{2}$ din capital; a doua parte este $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ din capital. Prin adunare avem: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ din capital, iar restul este $\frac{1}{6}$; a treia parte este $\frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$ din capital. Printr'o nouă adunare avem:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{15+10+2}{30} = \frac{27}{30} = \frac{9}{10};$$

deci a patra parte este $\frac{1}{10}$ din capital.

Să vedem acum un capital oare-care, astfel împărţit, de exemplu 120 lei, ce dobândă aduce conform enunţului.

Dacă 120 lei ar fi capitalul, cele 4 părţi fiind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{15}$ şi $\frac{1}{10}$ din el, sunt respectiv 60 lei, 40 lei, 8 lei şi 12 lei. Dobânzile corespunzătoare D_1, D_2, D_3, D_4 ţinând seamă de enunţ:

$$D_1 = \frac{60 \times 5 \times 27}{100 \times 12} = 6{,}75 \text{ lei},$$

$$D_2 = \frac{40 \times 10 \times 42}{100 \times 12} = 14 \text{ lei},$$

$$D_3 = \frac{8 \times 12 \times 46}{100 \times 12} = 3{,}68 \text{ lei},$$

$$D_4 = \frac{12 \times 15 \times 54}{100 \times 12} = 8{,}10 \text{ lei}.$$

Dobânda adusă de capitalul 120 lei, împărţit şi pus la dobândă conform enunţului, ar fi:

$$6{,}75 + 14 + 3{,}68 + 8{,}10 = 32{,}53 \text{ lei}.$$

Dacă suma de 32,53 lei provine de la capitalul 120 lei, atunci suma de 3090,35 lei, de ce capital va fi adusă?

Găsim cu uşurinţă printr'o regulă de trei simplă, că acest capital este:

$$C = \frac{3090{,}35 \times 120}{32{,}53} = 11400 \text{ lei};$$

iar cele patru părţi respective în care a fost împărţit capitalul iniţial, sunt:

5700 lei, 3800 lei, 760 lei şi 1140 lei.

Soluţii date de d-ra: *Ionescu Letiţia* (Şc. Normală, Sibiu) şi de d-nii: *Amărăşteanu Marcel* (Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit. N Filipescu), *Bacârea Alexandru* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Bădulescu Dan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Banciu Cornel* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Bejenaru Gh. Victor* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Boborodea I. Ion* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Capota Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Caraman D. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli P.* (Iaşi), *Cehan Gh. Aristide* (lic. Milit, Cernăuţi), *Chiriac C.* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Coandă I. Virgil* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Cosma V. Bediceanu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Czervesz Ioan* (lic. Beiuş), *Drăghici Cornel* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dumitraşcu R. Romeo*, *Dumitrescu Stelian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ferencz Tiberiu* (lic. Diaconovici-Loga, Timişoara), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Galan I. Ioan* (lic. Milit., Cernăuţi),

Gavrilescu N. C-tin (Iaşi), *Georgescu Emil, Godeanu I. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Milit., de Artilerie), *Hompola Tiberiu* (lic Beiuş), *Lefter Th. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Loziciu D. Ilie* (student, Cluj), *Mafteiu M. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Marnea Desideriu* (lic. Beiuş), *Matei Vasile* (lic Milit, Tg-Mureş), *Mănac D. Vasile* (lic. Milit., N. Filipescu), *Mihalcea N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Pambucdjian Chircor* (lic. Constanţa), *Panait Mircea, Pană Petre* (lic. Milit, N. Filipescu), *Păduraru V. Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Pun V. Nicolae* (Şc Polit., Timişoara), *Petrescu C. Octavian* (lic. Internat, Iaşi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popleşeanu Gh. Ionel* (l c. Milit., Cernăuţi), *Popovici Leonte* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Postelnicescu Mircea* (lic. Milit., N. Filipescu), *Racoţeanu C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Rădulescu Gh. Octav* (lic. Milit. N. Filipescu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Sămbotin Gh.* (Sub-Lt), *Săvulescu Spirea, Şcdlovschi Gh. Artimon* (lic. Milit., Cernăuţi), *Şerbănescu A. Mircea* (lic. Milit, Cernăuţi), *Stănciulescu Gh.* (lic. Milit, Cernăuţi), *Ştefănescu Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Strohal Rolf, Toma Nicolae* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ţighiliu Radu* (lic. Milit, Cernăuţi) şi *Vasilescu A Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi).

1277. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+z=-2 \\ y+u+xz=5 \\ yz+xu=-4 \\ yu=4 \end{cases}$$

ŞTEFAN MUSTA

Din prima ecuaţie avem:

$$(1) \qquad z=-x-2$$

şi inlocuind această valoare a lui z în ecuaţie 2-a şi a 3-a, obţinem:

$$(2) \quad y+u=5-x(-x-2)=x^2+2x+5$$

$$(3) \qquad -xy-2y+xu=-4.$$

Inmulţind ecuaţia (2) cu x şi (3) cu -1 şi adunându-le, găsim:

$$2xy+2y=x^3+2x^2+5x+4.$$

De aci scoatem:

$$(4) \qquad y=\frac{x^3+2x^2+5x+4}{2(x+1)},$$

valoare care înlocuită în (2), ne dă:

$$u=x^2+2x+5-\frac{x^3+2x^2+5x+4}{2(x+1)},$$

sau:

$$(5) \qquad u=\frac{x^3+4x^2+9x+6}{2(x+1)}.$$

Valorile lui y şi u date de (4) şi (5), înlocuite în ecuaţia 4-a a sistemului dat, ne dă:

$$\frac{x^3+2x^2+5x+4}{2(x+1)}\cdot\frac{x^3+4x^2+9x+6}{2(x+1)}=4,$$

sau:

$$(6) \quad (x^3+2x^2+5x+4)(x^3+4x^2+9x+6)=16(x+1)^2.$$

Observând că fiecare factor din membrul al 2 lea se divide prin $(x+1)$, putem scri ecuaţia (6) sub forma:

$$(x+1)^2(x^2+x+4)(x^2+3x+6)-16(x+1)^2=0.$$

De aci deducem:

$$(7) \qquad x=-1.$$

şi:

$$(x^2+x+4)(x^2+3x+6)-16=0.$$

Această din urmă ecuaţie se mai poate scri:

$$[x(x+1)+4][x(x+1)+2(x+1)+4]-16=0,$$

sau:

$$x^2(x+1)^2+2x(x+1)^2+8x(x+1)+8(x+1)=0.$$

Ecuaţia aceasta se mai poate scri încă:

$$x^2(x+1)^2+2x(x+1)^2+8(x+1)(x+1)=0,$$

sau:

$$(x+1)^2(x^2+2x+8)=0,$$

care are rădăcinile:

$$x=-1$$

şi:

$$x=-1\pm i\sqrt{7}, \qquad (i=\sqrt{-1}).$$

Ecuaţia (6) are deci rădăcinele:

$$x_1=-1, \quad \text{rădăcină cuadruplă.}$$

$$x_2=-1+i\sqrt{7} \quad \text{şi} \quad x_3=-1-i\sqrt{7}.$$

Inlocuind aceste valori ale lui x, în relaţiile (4), (1) şi (5) avem valorile corespunzătoare pentru y,

z şi u, astfel că sistemul dat admite următoarele trei sisteme de soluţii:

x	-1	$-1+i\sqrt{7}$	$-1-i\sqrt{7}$
y	2	$\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$	$\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$
z	-1	$-1-i\sqrt{7}$	$-1+i\sqrt{7}$
n	2	$\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}$	$\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}$

Au găsit toate cele trei sisteme de soluţii, d-nii: *Amărăsteanu Marcel* (Craiova), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila) şi *Sedlovschi Gh. Artimon* (lic. Milit., Cernăuţi).

Au găsit numai sistemele de soluţii reale d-nii: *Apostol Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Caraman D. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cârja Vasile* (lic. Milit, Cernăuţi), *Căsoeanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cehan S. Aristide* (lic. Milit, Cernăuţi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Galan I. Ioan* (lic. Milit., Cernăuţi), *Giurgiuman Al. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Gheorghiu Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Milit. de Artilerie), *Haret C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Iliescu D-tru* (lic. Milit, Cernăuţi), *Maşcaş Petre* (bacalaureat), *Mărgărint Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mihalcea Nicolae* (lic. Beiuş), *Miron Virgil* (lic. Milit., Cernăuţi), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Păun V. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu Greaca-Vlad* (lic. Milit., Cernăuţi), *Săvulescu Spirea, Trăsnitu Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Ţighiliu Gh. Radu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasilescu-Jiu C. N.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasiliu C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit, Cernăuţi).

D-l *Predoescu I. Marin*, a considerat în enunţ, $yu=40$ şi a găsit sistemul de soluţii: $x=-4$, $y=8$, $z=2$, $u=5$.

Altă soluţie dată de d-nii *Chiriac I. C.* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri) şi *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi).

Primele două ecuaţii date, puse sub forma:

$$\begin{cases} x+z=-2 \\ xz=5-y-u, \end{cases}$$

scriu suma şi produsul lui x, z; deci x, z sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$X^2+2X+5-y-u=0,$$

care rezolvată ne dă:

$$(1)\qquad \begin{cases} x=-1\pm\sqrt{y+u-4} \\ z=-1\mp\sqrt{y+u-4}. \end{cases}$$

Inlocuim aceste valori în a 3-a ecuaţie a sistemului dat şi avem:

$$-y\mp y\sqrt{y+u-4}-u\pm u\sqrt{y+u-4}=-4,$$

care se mai poate scri:

$$(2)\qquad \mp(y-u)\sqrt{y+u-4}=y+u-4,$$

sau:

$$(y-u)^2(y+u-4)=(y+u-4)^2,$$

pe care o mai putem scri încă:

$$(y+u-4)[(y-u)^2-(y+u)+4]=0.$$

Ţinând seamă şi de ecuaţia 4-a a sistemului dat, avem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} (y+u-4)[(y+u)^2-16-(y+4)+4]=0 \\ yu=4 \end{cases}$$

Aceste sistem, este echivalent cu următoarele:

$$(3)\qquad \begin{cases} y+u=4 \\ yu=4 \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (y+4)^2-(y+u)-12=0 \\ yu=4 \end{cases}$$

Sistemul (3) admite sistemul de soluţii:

$$(5)\qquad y=u=2.$$

Sistemul (4) se poate scri:

$$(6)\qquad \begin{cases} y+u=\dfrac{1+\sqrt{49}}{2}=4 \\ yu=4 \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} y+u=-3 \\ yu=4 \end{cases}$$

Sistemul (6) ne dă sistemul de soluţii obţinut deja:

$$y=u=2,$$

iar rădăcinele sistemului (7) sunt evident rădăcinele ecuaţiei:

$$Y^2+3Y+4=0,$$

adică:

$$\begin{cases} y=\dfrac{-3\pm i\sqrt{7}}{2} \\ u=\dfrac{-3\mp i\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Singurele sisteme de soluţii, care satisfac sistemul dat, sunt acelea trecute în tabloul din prima soluţie.

1278. — *Să se arate că în orice triunghiu avem relaţia:*

$$\frac{h_a^2\, h_b^2\, h_c^2}{8\,(h_b - h_a)\,(h_c - h_b)\,(h_a - h_c)} = \frac{r_a^2\, r_b^2\, r_c^2}{(r_a - r_b)\,(r_b - r_c)\,(r_c - r_a)}$$

ADRIAN POPESCU

Folosind relaţiile cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a}, \qquad r_a = \frac{s}{p-a},$$

şi analoagele lor, cei doi membrii ai relaţiei cerute, pe care să-i notăm pe scurt cu E şi F, se pot scrii succesiv:

$$E = \frac{\frac{4s^2}{a^2}\cdot\frac{4s^2}{b^2}\cdot\frac{4s^2}{c^2}}{8\left(\frac{2s}{b}-\frac{2s}{a}\right)\left(\frac{2s}{c}-\frac{2s}{b}\right)\left(\frac{2s}{b}-\frac{2s}{c}\right)} = \frac{s^3}{(a-b)\,(a-c)\,(c-b)}$$

$$F = \frac{\frac{s^2}{(p-a)^2}\cdot\frac{s^2}{(p-b)^2}\cdot\frac{s^2}{(p-c)^2}}{\left(\frac{s}{p-a}-\frac{s}{p-b}\right)\left(\frac{s}{p-b}-\frac{s}{p-c}\right)\left(\frac{s}{p-c}-\frac{s}{p-a}\right)} = \frac{s^3}{(a-b)\,(b-c)\,(c-a)} = \frac{s^3}{(a-b)\,(a-c)\,(c-b)}$$

Rezultă:

$$E = F,$$

deci relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăşteanu M.* (Craiova), *Apostol Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Bogdan Andriescu-Cale* (lic. Internat, Iaşi), *Caraman D. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli P.* (Iaşi), *Cârjă Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Căşoeanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cehan Gh. Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac I. C-tin* (Şcoala Pregăt. de Ofiţeri), *Coandă I. Virgil* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Dobrescu D. Paul* (lic. Milit. N. Filipescu), *Dumitrescu I. Stelian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Galan I. Ioan* (lic. Milit., Cernăuţi), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Gheorghiu Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ghervescu V.* (lic. Bacău), *Godeanu I. Vasile* (bacalaureat, Craiova), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Milit., de Artilerie), *Haret I. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Iliescu B. D-tru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Jarda Radu* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Lefter Th. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mărgărint G. Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mihalcea N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Millea G. E.* (Sub-Lt), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Păduraru V. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Pambucdjian Chircor* (lic. Constanţa), *Panait Mircea*, *Petrescu P. Anastasie* (Craiova), *Petrescu C. Octavian* (lic. Internat, Iaşi), *Petruc Th. Eugeniu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu Greacă Vlad* (lic. Milit., Cernăuţi), *Poplesşeanu Gh. Ionel* (lic. Milit, Cernăuţi), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Şabac Gh. Ion* (lic. Milit., N. Filipescu), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt), *Şedlovschi Gh. Artimon* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tanasiciuc V. Claudius* (lic. Milit, Cernăuţi), *Trăsnitu Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Ţărălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ţighiliu Radu* (lic. Milit, Cernăuţi), *Vasilescu A. Gh*, (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasilescu C. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasiliu A. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

1310. — *Să se elimine a din relaţiile:*

$$\frac{\sin a}{\sin a + \cos a} = A, \qquad \frac{\sin 2a}{\sin 2a + \cos 2a} = B.$$

Aceiaşi chestiune când numărătorii din primii membrii, sin a şi sin 2a se înlocuesc respectiv prin cos a şi cos 2 a.

V. ALACI

1. Impărţind prin *cos a* şi *cos 2 a* respectiv, termenii fracţiilor din relaţiile date, avem:

$$\frac{\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a} = A, \qquad \frac{\operatorname{tg} 2a}{1+\operatorname{tg} 2a} = B.$$

De aci deducem:

$$(1) \qquad \operatorname{tg} a = \frac{A}{1-A}, \qquad \operatorname{tg} 2a = \frac{B}{1-B}.$$

Folosind acum formula cunoscută:

$$(2) \qquad \operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}$$

şi înlocuind aci pe tg *a* şi tg 2 *a* cu valoarile lor date de (1), găsim:

$$\frac{B}{1-B} = \frac{2\frac{A}{1-A}}{1-\frac{A^2}{(1-A)^2}} = \frac{2A(1-A)}{1-2A}.$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor, putem scri încă:

$$B = \frac{2A(1-A)}{1-2A^2}.$$

Aceasta este relaţia cerută.

2. *Fie acum relaţiile:*

$$\frac{\cos a}{\sin a + \cos a} = A, \qquad \frac{\cos 2a}{\sin 2a + \cos 2a} = B,$$

şi să eliminăm pe a.

Aceste relaţii se mai pot scri:

$$\frac{1}{1 + \operatorname{tg} a} = A, \qquad \frac{1}{1 + \operatorname{tg} 2a} = B.$$

De aci deducem:

$$\operatorname{tg} a = \frac{1 - A}{A}, \qquad \operatorname{tg} 2a = \frac{1 - B}{B}.$$

Inlocuind aceste valori în relaţia (2) de mai sus, avem:

$$\frac{1 - B}{B} = \frac{2A(1 - A)}{2A - 1},$$

sau încă:

$$B = \frac{1 - 2A}{1 - 4A + 2A^2},$$

relaţie în care a este eliminat.

Soluţii date de d-nii: *Buçur Virgil* (lic. Milit, Iaşi), *Budeanu C-tin* (Şc. Polit., Bucureşti), *Buzoncu Ion* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Ciucă Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit. N. Filipescu), *Enăsescu D Victor* (lic. Milit, Iaşi), *Isac C. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Loziciu I.* (student, Cluj), *Manea Desideriu* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Postelnicescu Mircea* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş).

Observare. S'au primit şi două soluţii greşite.

PROBLEME PROPUSE

1385. — Să se găsească trei patrate perfecte de două cifre, care scrise unul după altul formează un patrat perfect de şase cifre.

G. G. CONSTANTINESCU

1386. — Dintre soluţiunile în numere întregi ale ecuaţiei:

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

să se găsească forma acelora care sunt în progresie aritmetică şi pe a acelora care sunt în progresie geometrică.

G-L GH. BUICLIU

1387. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)(x^6 + y^6) = 3965 \\ (x^2 + y^2)(x^6 - y^6) = 8645 \end{cases}$$

VASILE GODEANU

1388. — Să se afle condiţia dintre coeficienţii unei ecuaţii de gradul al 3-lea, pentru ca rădăcinele ei să formeze o proporţie armonică şi apoi să se rezolve ecuaţia.

ION RIZESCU

1389. — Intr'o sferă de rază R, se înscrie un con circular drept, având raza bazei $\frac{3}{5}$ din raza sferei. Se duce din centrul sferei O, perpendiculara OE pe generatoarea conului şi prin E o secţiune paralelă cu baza conului.

Să se afle volumul conului şi al trunchiului de con format, precum şi raportul lor.

CORNELIA NANES

1390. — Să se construiască un triunghiu cunoscând distanţele la una din laturi, a centrelor patratelor construite exterior (sau interior) pe cele trei laturi.

V. THÉBAULT

1391. — Intr'un trapez ABCD, MN, M_1N_1 $M'N'_1$, sunt segmente paralele cu bazele AB şi CD, cuprinse între laturile AC şi BD şi trecând respectiv prin intersecţia diagonalelor AD cu BC, AN cu BM şi MD cu NC din trapezele ABCD, ABMN şi MNCD.

Să se arate că există relaţia:

$$3 M'_1 N'_1 > M_1 N_1, \qquad (\text{dacă } AB > CD).$$

Să se calculeze bazele trapezului ABCD, cunoscând segmentele M_1N_1 şi $M'_1N'_1$. Generalizare.

I. V. MATIES

1392. — A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu oarecare, să se stabilească relaţia:

$$\sum \frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A} - 2 \prod \frac{\sin A}{1 + \sin A + \cos A} = 1.$$

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru :

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

PUBLICAŢIUNILE INSTITUTULUI MATEMATIC ROMAN

Director: prof. dr. Rodolphe RACLIŞ, Aleea Vulpache 21, Bucureşti 3, Telefon 22.444

AU APĂRUT PENTRU ANUL ŞCOLAR 1934—1935:

1° GEOMETRIE ANALITICĂ de *G. Ţiţeica*, ediţia 4-a, inclusiv chestiuni de examen rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

2° ALGEBRĂ SUPERIOARĂ de *A. Angelescu*, ediţia 3-a, inclusiv probleme de Seminar, chestiuni de examen, rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

3° MATEMATICI ELEMENTARE şi GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *D. Barbilian*, ediţia 3-a, partea întâia, Algebră . . . . . 70 lei

4° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, cuprinde Dreapta, Planul, Conice, Cuadrice, cu exerciţii, probleme de seminar, şi chestiuni de examen; pentru studenţii dln Anul I, secţiile Matematică şi Fizico-chimice şi elevii din Anul preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

5° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *D. Pompeiu*, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . 50 lei

6° MECANICĂ, partea I, de *A. G. Ioachimescu*, ediţia 2-a, cu probleme, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 90 lei

7° CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, pentru elevii clasei VII secundară secţia ştiinţifică pentru elevii Liceelor Militare, pentru studenţii Anului I, secţiile Matematică. Electrotechnică şi Chimie Industrială, pentru elevii Anului Preparator de la Şcoalele Politechnice şi Academia de Arhitectură.

8. ELEMENTE DE CALCUL DIFERENŢIAL ŞI CALCUL INTEGRAL de *R. Racliş*, ediţia 2-a, cu exerciţii şi probleme de Seminar; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică, şi elevii din Anul I, Şcoalele Politechnice.

9° ANALIZA INFINITEZIMALĂ de *A. Davidoglu*, ediţia 4-a, cu exerciţii, probleme de seminar şi chestiuni de examen; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică . . . . . 240 lei

10° MECANICA RAŢIONALĂ, partea II, de *A. G. Ioachimescu*, cu chestiuni de examen, rezolvate; pentru elevii din anul I, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

11° REVISTA UNIVERSITARA MATEMATICA, journal rédigé par *Rodolphe Raclis*, pour les candidats à la Licence et les élèves des Grandes Ecoles, in 8° de VIII+256 pages; cuprinde chestiuni de examen rezolvate şi articole, note sau probleme semnate Tr. Lalescu, E. Picard, V. Volterra, G. Julia, G. Ţiţeica, D. Pompeiu, I. Ionescu, V. Vâlcovici, R. Racliş, H. Villat, D. Barbilian, N. Coculescu, E. Cahen, D. Emanuel, G. Filipescu, A. Ioachimescu, G. Nichifor, Sc. Panaitescu, C. Popovici, S. Sanielevici, G. Sudan, L. Teodoriu, V. Claudian Coşniţă, N. Botea, Ş. Ţiţeica, N. Teodorescu, I. Georgescu Racoviţă, C. Ionescu Bujor, G. Simionescu, T. Popoviciu, Caius Iacob, C. Drâmbă, G. Tailer, Tr. Lişcu, R. Woinarosky, etc. . . . . 140 lei

12° LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE par *Trajan Lalesco*, (pour paraître prochainement).

13° INTRODUCTION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES par *Trajan Lalesco*, 2-e édition (pour paraître prochainement).

14° SOLUTION PRINCIPALE DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES DE POINCARÉ par *Rodolphe Racliş*, édition des Presses Universitaires de France, Paris . . . . . 190 lei

15° ANNALES ROUMAINES DE MATHÉMATIQUES, journal publié par *Rodolphe Racliş* (pour paraître prochainement).

Publicaţiile Institutului Matematic Român se găsesc de vânzare la Librăria „Cartea Românească" Bulevardul Academiei 3, Bucureşti 1.

ANUL XV. 15 IUNIE 1935 No. 4.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. G-L GH. BUICLIU: NUMERE ALE CAROR PATRATE SE TERMINA CU CIFRE IN PROGRESIE ARITMETICA SAU GEOMETRICA.

3. NOTE MATEMATICE: 7, 8.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 343, 1165, 1303, 1304, 1312, 1316, 1317.

6. PROBLEME PROPUSE: 1339-1340.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — NO. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

NUMERE ALE CĂROR PATRATE SE TERMINĂ CU CIFRE IN PROGRESIE ARITMETICĂ SAU GEOMETRICĂ

DE

G-L GH. BUICLIU

In revista „*Mathesis*“ din 1934 s-a propus la pagina 414 problema 2870 în care se cere: *să se găsiască cel mai mic patrat perfect care se termină cu 5 cifre în progresie aritmetică.*

Ocupându-mă de această problemă, am căutat să rezolv problema într'un cadru mai larg și să caut: *forma generală a numerelor ale căror patrate se termină cu cifre în progresiune aritmetică sau geometrică*, oprindu-mă de o cam dată până la terminațiunea de 5 cifre.

Rezultatele găsite sunt cele ce urmează.

I. *Numere ale căror patrate se termină cu cifre în progresie aritmetică.*

a) Ultimele 3 cifre cu care se termină patratul, sunt în progresie aritmetică.

Forma numerilor ale căror patrate se termină cu un anumit grup de 3 cifre, a fost dată de d-l *I. V. Mățieș* în „*Gazeta Matematică*“, Vol. XXXVII, la pag. 368, unde trebuie făcute următoarele rectificări:

La terminațiunea 244, corespunde $500n \pm 162$ în loc de 161.

La terminațiunea 644, corespunde $500n \pm 238$ în loc de 258.

La terminațiunea 684, corespunde $500n \pm 322$ în loc de $250n \pm 133$.

Extrăgând din acel tabel numai terminațiunile în progresie aritmetică, obținem următorul rezultat:

Numerele	au patratele terminate în	Numerele	au patratele terminate în
$100n$	000	$500n \pm 116$	456
$500n \pm 32$	024	$500n \pm 242$	564
$500n \pm 6$	036	$500n \pm 24$	576
$250n \pm 101$	201	$500n \pm 68$	624
$500n \pm 198$	204	$500n \pm 322$	684
$500n \pm 208$	264	$500n \pm 234$	756
$250n \pm 111$	321	$500n \pm 202$	804
$500n \pm 18$	324	$500n \pm 192$	864
$250n \pm 37$	369	$500n \pm 126$	876
$500n \pm 86$	396	$500n \pm 44$	936
$500n \pm 38$	444	—	—

Am considerat și progresiile particulare 000, 444 cu rația nulă.

Din acest tabel, sunt de remarcat numerele $500n + 234$, care pentru n pereche, se termină cu progresia 2, 3, 4 și au patratele terminate cu progresia 5, 6, 7.

b) Ultimele 4 cifre, care termină patratul, sunt în progresie aritmetică.

Formăm de o cam dată următorul tabel, care are în coloana întâi toate grupurile posibile de 4 cifre în progresie aritmetică, iar coloana a doua, în dreptul fie-cărei grupe aranjamentele, care pot fi terminațiuni de patrate, ținând seamă de tabelul citat, dat de d-l *I. V. Mățieș* și de nota matematică a d-lui *Th. N. Panaite* de la pag. 134, „*Gazeta Matematică*“, Vol. XXXV, unde dă grupurile de 4 cifre, cu care se pot termina patratele perfecte:

Grupe de 4 cifre în progresie aritmetică	Terminaţiuni de patrate perfecte
0123	3201 ; 0321
1234	1324 ; 3124 ; 4321
2345	— — —
3456	3456 ; 4356 ; 5364
4567	4576 ; 4756 ; 5476 ; 5764 ; 7456
5678	5876 ; 7856 ; 8576 ; 8756
6789	8769 ; 8976 ; 9876
0246	0624 ; 2064
2468	2864 ; 8624
1357	— —
3579	— —
0369	0369

Să caut numerele x ale căror patrate se termină în 3201.

In tabelul citat, dat de d-l *I. V. Mătieş*, să găseşte că numărul:

(1) $$x = 250\,n \pm 101$$

are patratul terminat în 201. Considerăm numai semnul + de o cam dată şi ridicăm ambii membri la patrat:

(2) $$x^2 = 62500\,n^2 + 50500\,n + 10201.$$

Ca verificare se vede că cifra miilor sumei primilor 2 părţi, este egală cu cifra unimilor produsului $5 \times n(n+1)$, care e zero căci $n(n+1)$ este totdeauna pereche. Deci x^2 se termină cu 201.

Pentru a determina forma lui n şi deci a lui x aşa ca x^2 să se termine în 3201, vom face în (2) pe n întâi pereche şi apoi nepereche.

Când $n = 2p$, (2) dă:

$$x^2 = p^2 \times 250000 + p + 101000 + 10201,$$

de unde se vede că cifra a patra de la dreapta lui x^2 este aceiaşi cu cifra unimilor lui p, această cifră este 3 când:

$$p = 10\,m + 3,$$

ceia-ce dă revenind prin n la (1):

$$x = 5000\,m \pm 1601,$$

semnul — corespunde lui — din (1).

Se găseşte pe aceiaşi cale pentru $n = 2p + 1$:

$$x = 5000\,m \pm 351.$$

Să examinăm terminaţia 3124. Numerele ale căror patrate se termină în 124, sunt:

$$x = 500\,n \pm 182,$$

de unde considerând numai semnul +, avem:

$$x^2 = n^2 \times 250000 + n \times 182000 + 33124,$$

a cărui cifră de rangul 4 de la dreapta este dată de unităţile sumei $3 + 2n$, care vor fi 3 când $n = 5m$. Procedând la fel pentru semnul —, se ajunge la rezultatul că patratul numărului:

$$x = 2500\,m \pm 182,$$

se termină cu 3124.

Urmând calea dată pentru aceste două exemple, găsim următorul tabel al numerilor ale căror patrate se termină cu 4 cifre în progresie aritmetică.

Numerele	au patratele terminate în	Numerele	au patratele terminate în
$5000\,m \pm 361$	0321	$2500\,m \pm 116$	3456
$5000\,m \pm 4111$		$5000\,m \pm 1111$	4321
$5000\,m \pm 2287$	0369	$5000\,m \pm 2361$	
$5000\,m \pm 3537$		$2500\,m \pm 66$	4356
$2500\,m \pm 1068$	0624	$2500\,m \pm 24$	4576
$2500\,m \pm 2008$	2064	$2500\,m \pm 234$	4756
$2500\,m \pm 1692$	2864	$2500\,m \pm 2058$	5364
$2500\,m \pm 182$	3124	$2500\,m \pm 74$	5476
$5000\,m \pm 1601$	3201	$2500\,m \pm 1042$	5764
$5000\,m \pm 351$		$2500\,m \pm 126$	5876
$2500\,m \pm 126$	5876	$2500\,m \pm 1568$	8624
$2500\,m \pm 2116$	7456	$5000\,m \pm 1113$	8769
$2500\,m \pm 684$	7856	$5000\,m \pm 4863$	
$2500\,m \pm 1024$	8576	$2500\,m \pm 1676$	8976
$2500\,m \pm 734$	8756	$2500\,m \pm 2126$	9876

c) Ultimele 5 cifre sunt în progresie aritmetică. Numerele care ne interesează, se găsesc întocmai ca la cazul *b)*. Se formează întâi toate grupele de 5 cifre în progresie aritmetică, în fiecare grupă se reţin aranjamentele de 4 cifre cu care se termină un patrat şi apoi se procedează

ca la *b)*. Examinarea este foarte aridă şi plicticoasă, ea nu prezintă altă dificultate de cât înfrângerea monotoniei repetării unei aceleiaşi operaţiuni aritmetice de un număr mare de ori. Am reuşit să înfrâng acea monotonie, ceia-ce la preocupările mele de altă natură contează ceva; rezultatul, însă nu prezintă de cât interesul oricărui tabel numeric, care ar putea avea unele aplicaţiuni în legătură cu terminaţiunile pătratelor perfecte.

Iată, tot sub forma tabelelor precedente, rezultatul la care am ajuns:

Numerile	au patratele terminate în	Numerele	au patratele terminate în
$50000\,n \pm 2829$ $50000\,n \pm 46579$	03241	$25000\,n \pm 24516$	34256
		$50000\,n \pm 4789$ $50000\,n \pm 48539$	34521
$50000\,n \pm 17361$ $50000\,n \pm 36111$	04321	$12500\,n \pm 10234$	34576
$25000\,n \pm 10932$	08624	$50000\,n \pm 6829$ $50000\,n \pm 27829$	35241
$25000\,n \pm 22548$	12304		
$25000\,n \pm 8032$	13204	$25000\,n \pm 12208$	35264
$50000\,n \pm 10321$ $50000\,n \pm 29071$	23041	$25000\,n \pm 7116$	37456
		$50000\,n \pm 5361$ $50000\,n \pm 24111$	40321
$25000\,n \pm 152$	23104		
$50000\,n \pm 33299$ $50000\,n \pm 39549$	23401	$50000\,n \pm 10351$ $50000\,n \pm 41601$	43201
$12500\,n \pm 10066$	24356	$50000\,n \pm 20289$ $50000\,n \pm 39039$	43521
$12500\,n \pm 7578$	26084		
$25000\,n \pm 8008$	28064	$50000\,n \pm 26611$ $50000\,n \pm 32861$	45321
$50000\,n \pm 9329$ $50000\,n \pm 28029$	30241		
		$25000\,n \pm 22629$	45376
$25000\,n \pm 7532$	31024	$25000\,n \pm 10684$	47856
$25000\,n \pm 2198$	31204	$25000\,n \pm 5182$	53124
$12500\,n \pm 6718$	31524	$50000\,n \pm 579$ $50000\,n \pm 21579$	53241
$50000\,n \pm 43571$ $50000\,n \pm 49821$	32041		
		$25000\,n \pm 22708$	53264
$50000\,n \pm 35049$ $50000\,n \pm 3799$	32401	$12500\,n \pm 1074$	53476
		$12500\,n \pm 3042$	53764
$50000\,n \pm 11111$ $50000\,n \pm 42361$	54321	$50000\,n \pm 41587$ $50000\,n \pm 47837$	78569
$25000\,n \pm 5644$	54736	$25000\,n \pm 2186$	78596
$12500\,n \pm 8518$	56324	$25000\,n \pm 9684$	79856
$25000\,n \pm 1028$	56784	$25000\,n \pm 16068$	80624
$50000\,n \pm 16117$	57689	$25000\,n \pm 14508$	82064
$50000\,n \pm 21113$ $50000\,n \pm 39863$	58769	$25000\,n \pm 8024$	84576
		$25000\,n \pm 10074$	85476
$25000\,n \pm 14176$	58976	$12500\,n \pm 1042$	85764
$12500\,n \pm 9626$	59876	$50000\,n \pm 29363$	85769
$25000\,n \pm 1078$	62084	$12500\,n \pm 5214$	86796
$12500\,n \pm 6218$	63524	$25000\,n \pm 19616$	87456
$25000\,n \pm 14672$	67584	$50000\,n \pm 1337$ $50000\,n \pm 20087$	87569
$25000\,n \pm 5116$	73456		
$25000\,n \pm 1244$	74536	$12500\,n \pm 2626$	95876
$12500\,n \pm 4558$	75364	$25000\,n \pm 23184$	97856
$12500\,n \pm 822$	75684	$25000\,n \pm 13524$	98576
$50000\,n \pm 43117$	75689	$25000\,n \pm 8234$	98756
$25000\,n \pm 5242$	78564		

Pentru terminaţiuni de mai mult de 5 cifre în progresie aritmetică, examinarea se face la fel, dar se cere şi mai mare răbdare.

II. *Numere ale căror patrate se termină cu cifre în progresie geometrică.*

Singurile grupe de 3 cifre în progresie geometrică, terminaţiuni de patrate perfecte sunt 124, 241, 284, 824, care dau soluţiile:

$500\,n \pm 182$	124	$500\,n \pm 222$	284
$250\,n \pm 79$	241	$500\,n \pm 232$	824

la care se poate adăuga terminaţiunea 444 cu raţia 1.

In fine găsesc următoarele forme de numere, ale căror patrate se termină cu 4 cifre în progresie geometrică:

$2500n \pm 722$	1284	$5000n \pm 2779$	2841
$2500n \pm 2232$	1824	$5000n \pm 4029$	
$5000n \pm 559$	2481	$5000n \pm 3091$	4281
$5000n \pm 1809$		$5000n \pm 4391$	
$5000n \pm 329$	8241		
$5000n \pm 4079$			

Urmând căi analoage, se poate găsi forma numerilor ale căror patrate se termină în 6, 7, 8 sau 9, cifre în progresie aritmetică, evident că trebuie calcule foarte anevoioase pentru aceasta.

NOTE MATEMATICE

7. — *Asupra problemei 425 „R. M. T.", Vol. V, pag. 45.*

Problema 425 se pretează la o generalizare astfel: Fie sistemul:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}{a_1 x_2 x_3 \dots x_{n-1} + a_2 x_1 x_3 \dots x_{n-1} + \dots + a_{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-2}} = a_n \\ \dfrac{x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-2} x_n}{a_1 x_2 x_3 \cdots x_{n-2} x_n + a_2 x_1 x_2 \cdots x_{n-2} x_n + \cdots + a_n x_1 x_2 \cdots x_{n-2}} = a_{n-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{x_1 x_3 x_4 \dots x_n}{a_1 x_3 x_4 \dots x_n + a_3 x_1 x_4 \dots x_n + \cdots + a_n x_1 x_3 x_4 \dots x_{n-1}} = a_2 \\ \dfrac{x_2 x_3 x_4 \dots x_n}{a_2 x_3 x_4 \dots x_n + a_3 x_2 x_4 \dots x_n + \cdots + a_n x_2 x_3 x_4 \dots x_{n-1}} = a_1 \end{cases}$$

Având n necunoscute $x_1, x_2, \dots, x_n$ şi n ecuaţii.

Inversând ambii membri ai ecuaţiilor şi împărţind fiecare termen cu numitorul corespunzător, se obţine sistemul:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \dfrac{a_3}{x_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-2}}{x_{n-2}} + \dfrac{a_{n-1}}{x_{n-1}} = \dfrac{1}{a_n} \\ \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \dfrac{a_3}{x_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-2}}{x_{n-2}} + \dfrac{a_n}{x_n} = \dfrac{1}{a_{n-1}} \\ \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_2}{x_2} + \dfrac{a_3}{x_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \dfrac{a_n}{x_n} = \dfrac{1}{a_{n-2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{a_1}{x_1} + \dfrac{a_3}{x_3} + \dfrac{a_4}{x_4} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \dfrac{a_n}{x_n} = \dfrac{1}{a_2} \\ \dfrac{a_2}{x_2} + \dfrac{a_3}{x_3} + \dfrac{a_4}{x_4} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \dfrac{a_n}{x_n} = \dfrac{1}{a_1} \end{cases}$$

Adunând ecuaţiile membru cu membru şi observând că fiecare din termenii $\frac{a_i}{x_i}$ (pentru $i=1, 2, \dots n$) întră de $n-1$ ori, împărţind deci ambii membri cu $n-1$, se obţine ecuaţia:

$$(3)\quad \frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{x_2} + \frac{a_3}{x_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{a_n}{x_n} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}\right).$$

Scăzând ultima ecuaţie din sistemul (2), avem:

$$\frac{a_1}{x_1}=\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)-\frac{1}{a_1}=$$

$$\frac{a_1 a_3\ldots a_{n-1}a_n+a_1 a_2 a_4\ldots a_n+\cdots+a_1 a_2\ldots a_{n-1}-(n-2)a_2 a_3\ldots a_n}{(n-1)a_1 a_2\ldots a_{n-1}a_n},$$

de unde:

$$x_1=\frac{(n-1)a_1^2 a_2 a_3\ldots a_{n-1}a_n}{a_1 a_3\ldots a_{n-1}a_n+a_1 a_2 a_4\ldots a_n+\cdots+a_1 a_2\ldots a_{n-1}-(n-2)a_2 a_3\ldots a_n}.$$

Scăzând din (3) pe rând celelalte ecuaţii ale sistemului (2), se obţin:

$$x_2=\frac{(n-1)a_1 a_2^2 a_3\ldots a_{n-1}a_n}{a_1 a_2\ldots a_{n-2}a_n+a_1 a_2 a_4\ldots a_n+\cdots+a_1 a_2\ldots a_{n-1}-(n-2)a_1 a_3\ldots a_n}$$

. . . . . .

$$x_n=\frac{(n-1)a_1 a_2 a_3\ldots a_{n-1}a_n^2}{a_1 a_2\ldots a_{n-2}a_n+a_1 a_2\ldots a_{n-3}a_{n-1}a_n+\cdots+a_2 a_3\ldots a_n-(n-2)a_1 a_2\ldots a_{n-1}}$$

V. Mioc

8. — *Generalizarea problemei 1310.*

In rândurile ce urmează îmi propun să elimin pe x între relaţiunile:

$$\frac{a\sin mx}{b\sin mx+c\cos mx}=A\,;\quad\frac{\alpha\sin nx}{\beta\sin nx+\gamma\cos nx}=B,$$

sau între relaţiunile:

$$\frac{a\cos mx}{b\sin mx+c\cos mx}=A\,;\quad\frac{\alpha\cos nx}{\beta\sin nx+\gamma\cos nx}=B,$$

cari constituesc generalizarea problemei 1310 rezolvată în „R. M. T.", vol. XV, p. 35.

Folosind formulele clasice ale lui *Euler:*

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\,;\quad\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},$$

observ că cele două grupe de relaţiuni considerate se pot scrie sub forma următoare:

$$\frac{a(e^{imx}\mp e^{-imx})}{(b+ic)e^{imx}-(b-ic)e^{-imx}}=A\,;$$

$$\frac{\alpha(e^{inx}\mp e^{-inx})}{(\beta+i\gamma)e^{inx}-(\beta-i\gamma)e^{-inx}}=B,$$

având la numărător semnul negativ sau positiv, după cum ne referim la prima sau secunda grupă de două relaţiuni considerate.

Din aceste relaţiuni deducem cu uşurinţă:

$$e^{2imx}=\frac{(b-ic)A\mp a}{(b+ic)A-a}$$

$$e^{2inx}=\frac{(\beta-i\gamma)B\mp\alpha}{(\beta+i\gamma)B-\alpha},$$

cari se pot scri:

$$e^{2imnx}=\left\{\frac{(b-ic)A\mp a}{(b+ic)A-a}\right\}^n.$$

$$e^{2imnx}=\left\{\frac{(\beta-i\gamma)B\mp\alpha}{(\beta+i\gamma)B-\alpha}\right\}^m$$

şi prin urmare, rezultatul eliminării lui x între cele două grupe de două relaţiuni considerate, este:

$$\left\{\frac{(b-ic)A\mp a}{(b+ic)A-a}\right\}^n=\left\{\frac{(\beta-i\gamma)B\mp\alpha}{(\alpha+i\gamma)B-\alpha}\right\}^m,$$

luând la numărător semnul negativ sau positiv, după cum ne referim la prima sau secunda grupă de relaţiuni considerate.

In al doilea rând, voiu observa că eliminarea cerută se poate efectua şi mai simplu, scriind prima grupă de relaţiuni sub forma:

$$\frac{a\operatorname{tg}mx}{b\operatorname{tg}mx+c}=A\qquad\frac{\alpha\operatorname{tg}nx}{\beta\operatorname{tg}nx+\gamma}=B,$$

din care se deduce uşor că:

$$\operatorname{tg}mx=\frac{Ac}{a-bA}\qquad\operatorname{tg}nx=\frac{\beta\gamma}{\alpha-\beta B},$$

rezultând că:

$$mx=\operatorname{arc\,tg}\frac{Ac}{a-bA}\qquad nx=\operatorname{arc\,tg}\frac{B\gamma}{\alpha-\beta B}$$

şi prin urmare că rezultatul eliminării este:

$$n \operatorname{arc\,tg} \frac{A\,c}{a - b\,A} = m \operatorname{arc\,tg} \frac{B\,\gamma}{\alpha - \beta\,B}.$$

In mod cu totul analog, se găseşte că expresiunea:

$$n \operatorname{arc\,cotg} \frac{A\,b}{a - c\,A} = m \operatorname{arc\,cotg} \frac{B\,\beta}{\alpha - \gamma\,B},$$

este rezultatul eliminării lui x între grupa secundă de relaţiunile considerate.

In fine, pentru a termina, voiu observa că rezultatele obţinute prin cele două metode, ne permit să scriem identităţile următoare:

$$\left\{\frac{(b - i\,c)\,A - a}{(b + i\,c)\,A - a}\right\}^n - \left\{\frac{(\beta - i\,\gamma)\,B - \alpha}{(\beta + i\,\gamma)\,B - \alpha}\right\}^m =$$

$$n \operatorname{arc\,tg} \frac{A\,c}{a - b\,A} - m \operatorname{arc\,tg} \frac{B\,\gamma}{\alpha - \beta\,B}$$

$$\left\{\frac{(b - i\,c)\,A + a}{(b + i\,c)\,A - a}\right\}^n - \left\{\frac{(\beta - i\,\gamma)\,B + \alpha}{(\beta + i\,\gamma)\,B - \alpha}\right\}^m =$$

$$n \operatorname{arc\,cotg} \frac{A\,b}{a - c\,A} - m \operatorname{arc\,cotg} \frac{B\,\beta}{\alpha - \gamma\,B},$$

destul de interesante şi a căror demonstrare directă nu întâmpină dificultăţi prea mari.

G. G. CONSTANTINESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XL, No. 9, Mai 1935. Sur les nombres cycliques, par *V. Thébault.* Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu.* Suma unei serii, de *Gh. Th. Gheorghiu.* Proprietăţi ale triunghiului, de *Cezar Ivănescu.*

2. *Boletin Matematico,* an. VIII, No. 2, Aprilie 1935, Buenos Aires. Cuprinde discursurile ţinute cu prilejul înaugurării „Casei Gazeta Matematică", de d-nii: Inginer Inspector General *I. Ionescu.* General *Gh. Buiciiu* şi Profesor, *Gh. Ţiţeica,* secretarul general al Academiei Române.

3. *Revista cercului de studii al şcoalei superioare P. T. T., Timişoara, an. IV, No. 5.*

4. *Dr. Ing. Pl. Andronescu.* Le problème du dimensionnement des grandeurs électriques et magnétiques.

5. *Dr. Ing. Pl. Andronescu.* Considérations sur le problème du dimensionnement des grandeurs électriques et magnétiques.

6. La *Societatea Ştiinţifică de la Şcoala Politehnică din Timişoara,* a avut loc în cursul anului 1934—1935 următoarele comunicări:

Luni, 10 Dec. 1934:

1. *Prof. V. Alaci:* Dare de seamă despre mersul Soc. ştiinţifice de la şcoala noastră.
2. Alegerea noului comitet.
3. *Rector Ing. C. Teodorescu:* Incercări ale lemnului (colaborare la comisia internaţională pentru studiul lemnului).
4. *Prof. V. Alaci:* O clasă de ecuaţiuni funcţionale cu soluţiuni simplu-discontinue.

Marţi, 18 Dec. 1934.

1. *Prof. P. Sergescu:* Generalizarea unei teoreme a a lui *Laguerre* şi aplicaţiuni.
2. *Prof. V. Alaci:* O clasă de ecuaţiuni algebrice a D-lui *Prof. P. Sergescu.*

Luni, 28 Ian. 1935.

1. *Prof. Dr. Ing. P. Andronescu:* Despre forţa centrifugală.
2. *Conf. Ing. A. Bărglăzan:* Contribuţiuni la determinarea numărului paletelor unei turbine hidraulice.

Luni, 18 Febr. 1935.

1. *Asist. Ing. I. Suhov:* Zăcămîntul osifer din Gura Galbenă, Jud. Tighina.
2. *Asist. Ing. I. Suhov:* Zăcăminte osifere şi parcuri naţionale.
3. *Prof. Dr. V. Alaci:* O metodă pentru calcularea unor produse trigonometrice.

Luni, 11 Martie 1935.

1. *Prof. Dr. V. Patriciu:* Aspecte noi din industria de petrol.
2. *Prof. Dr. St. Mateescu:* Un vulcan în împrejurimile Timişoarei.

Luni, 15 Martie 1935.

1. *Dr. Ing. R. Răduleţ:* Efectul pelicular în elipsoizii circulari şi în sfere.
2. *Rector Ing. C. Teodorescu:* Prăbuşirea acoperişului Cinematografului Capitol.

Luni, 27 Mai 1935.

1. *Dr. Ing. R. Răduleţ:* Problema termică şi electrică a sudajului electric prin presiune.
2. *Prof. V. Alaci:* Legea de formare pentru cât şi resi a împărţirii a două polinoame.
3. *Prof. V. Alaci:* Cuvânt de închiere a activităţii pe anul 1934—1935.

7. *Asociaţia profesorilor de Matematici din Timişoara,* a ţinut în cursul anului 1934—35, următoarele şedinţe:

Luni, 3 Dec. 1934:

1. D-l Prof. *O. Ţino:* Informaţiuni cu caracter didactic.
2. D-l Prof. *V. Alaci:* O metodă pentru construirea identităţilor algebrice.

Marţi, 18 Dec. 1934.

1. D-l Prof. *P. Sergescu:* Metodele directe azi în Matematici.
2. D-l Prof. *V. Alaci:* Dare de seamă despre o lucrare a d-lui prof. *P. Sergescu,* intitulată „Asupra unor însumări".

Luni, 14 Ian. 1935:

1. D-l prof. *E. Csilcser:* Rolul discriminantului în Algebră.

2. D-l prof. *V. Mioc:* Studiul curbelor de forma: $\rho^3 = a^3 \cos n\,0$.

Luni, 4 Febr. 1935:

1. D-l prof. *O. Ţino:* Chestiuni de didactică: *a*) relativă la perimetrele poligoanelor asemenea; *b*) referitor la ariile poligoanelor regulate.
2. D-l prof. *V. Alaci*: Sume trigonometrice transformate în produse.

Luni, 4 Martie 1935:

1. D-l prof. *E. Csilcser:* Conice asemenea.
2. D-l prof. *V. Mioc:* referat asupra unei lucrări a d-lui prof. *V. Alaci*, „asupra expresiunilor nedeterminate".

Luni, 18 Martie 1935:

1. D-l prof. *V. Vlad:* Ceasurile de soare.
2. D-l prof. *E. Mihaiu:* Despre asigurări în general.

Luni, 8 Aprilie 1935.

1. D-l prof. *O. Ţino:* O chestiune de geometrie.
2. D-l prof. *V. Alaci:* O clasă de ecuaţiuni algebrice cu rădăcini trigonometrice.

Luni, 3 Iunie 1935:

1. D l prof. *E. Mihaiu:* Calcularea procentului la rente, forma *Achard.*
2. D-l prof. *O. Ţino:* Chestiuni de didactică matematică.
3. D-l prof. *V. Alaci:* Aflarea directă a maximului unui produs şi a minimului unei sume.
4. D-l Prof. *V. Alaci:* Cuvânt de inchiere a activităţii pe anul 1934—1935.

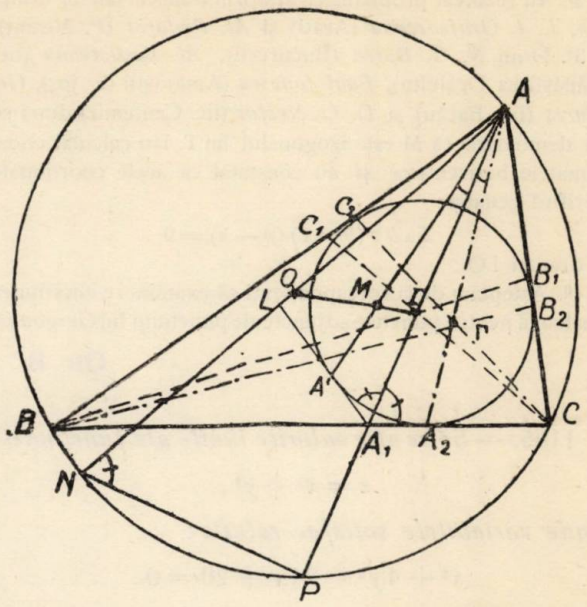
PROBLEME REZOLVATE

343. — *Fie* I *şi* O *centrele cercului înscris şi circumscris unui triunghiu* ABC. *Din picioarele bisectoarelor triunghiului* ABC *se duc tangente la cercul* I *ale căror puncte de tangenţă sunt* A′, B′, C′,... *Să se demonstreze că dreptele* AA′, BB′, CC′ *se întâlnesc într'un punct pe* IO.

G-L GH. BUICLIU

Soluţie dată de d-l *V. C. Gabrielescu,* (Brăila).

Fie A_1, B_1, C_1 picioarele bisectoarelor interioare şi A_2, B_2, C_2 punctele de tangenţă ale cercului I cu laturile triunghiului ABC. — Triunghiurile A_1AA', A_1AA_2 sunt egale că având latura AA_1 comună, laturile A_1A', A_1A_2 ca tangente comune la I, iar unghiurile IA_1A', IA_1A_2 egale. Deci unghiurile A_1AA', A_1AA_2 sunt egale şi prin urmare AA′ este izogonala lui AA_2. Ori, dreptele AA_2, BB_2, CC_2 concură în punctul lui *Gergonne* Γ, al triunghiului ABC, rezultă că şi izogonalele lor vor fi concurente. (Exercices de Mécanique par F. G. M. No. 1189 page 619 ext. 1914).



Notăm prin N şi P intersecţiile cercului O cu AO şi AA_1 şi prin L intersecţia lui AN cu A_1A' şi fie M întâlnirea lui IO cu AA′. Se vede pe figură că:

$$\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle AA_1A' = \frac{1}{2}\left(B + \frac{A}{2}\right).$$

Dar din triunghiul dreptunghic APN se vede că:

$$\sphericalangle ANP = \frac{1}{2}\left(B + \frac{A}{2}\right).$$

Deci patrulaterul NPA_1L este inscriptibil şi cum are unghiul din P drept, rezultă că şi unghiul din L este drept. Urmează că $AN \perp A_1L$ şi cum $IA' \perp A_1L$ rezultă că $IA' \parallel AO$. Triunghiurile IMA′ şi AMO sunt deci asemeni şi avem:

$$\frac{OM}{MI} = \frac{AO}{IA'} = \frac{R}{r} = \text{constant}.$$

La fel se arată că BB′, CC′ trec prin un punct M de pe OI care împart segmentul OI în raportul $\frac{R}{r}$. Partea a doua a problemei este deci demonstrată.

Soluţie analoagă a dat d-nii: *Coşniţă Cezar* (Bârlad), *N. Teodorescu* (lic. Sp. Haret, Bucureşti) şi *Süli M.* (Şc. Polit., Timişoara).

Observaţiuni. 1°. D-l *N. N. Mihăileanu* (Constanţa) a calculat pe cale trigonometrică valoarea constantă a segmentului I M.

2°. Au rezolvat problema cu ajutorul transversalelor d-nii: *Gh. L. I. Grofşoreanu* (Arad) şi *Al. Podariu* (P. Neamţ).

3°. D-nii *N. G. Botea* (Bucureşti), *Al. Budişteanu* (lic. Mânăstirea Dealului), *Paul Ionescu* (Amărăştii de jos), *Gr. Mareş* (lic. Bacău) şi *D. G. Nestor* (lic. Cantemir) după ce au demonstrat că M este izogonalul lui Γ, iau calculat coordonatele baricentrice şi au constatat că acele coordonate verifică ecuaţia:

$$\Sigma\, a\, b\, c\, (b-c)\,(p-a)=0$$

a dreptei I O.

4°. Aşteptăm de la corespondenţi să examineze chestiunea analoagă pentru punctele adjuncte ale punctului lui *Gergonne*.

GH. B.

1165. — *Să se afle valorile limite ale funcţiunei:*

$$z=x^2+y^2,$$

unde variabilele satisfac relaţia:

$$x^2+4y^2-24y+20=0.$$

Să se dea şi interpretarea geometrică.

V. MIOC

Se ştie că pentru a găsi valorile lui x şi y pentru care funcţiunea dată admite maxime sau minime, trebue să rezolvăm sistemul de ecuaţii format din relaţia de legătură şi ecuaţia:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}=0,$$

în care $f(x_1y)$ este relaţia de legătură, se obţine astfel sistemul:

$$\begin{cases} 12\,x(y-4)=0 \\ x^2+4y^2-24y+20=0, \end{cases}$$

care dă sistemele de soluţii:

$$\begin{cases} x_1=0,\ y_1=1 \\ x_2=0,\ y_2=5 \\ x_3=-2\sqrt{3},\ y_3=4 \\ x_4=2\sqrt{3},\ y_4=4. \end{cases}$$

Pentru a vedea care din ele fac funcţiunea maximă şi care minimă, cercetăm semnul lui $\frac{d^2z}{dx^2}$.

Se vede că:

$$\frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}$ se calculează din relaţia de legătură şi avem:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4(y-3)},$$

deci:

$$\frac{dz}{dx}=2x-\frac{xy}{2(y-3)},$$

Derivând relaţia din urmă din nou şi ţinând seamă că x intră direct şi prin intermediul lui y, se găseşte:

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2-\frac{y}{2(y-3)}-\frac{3x^2}{8(y-3)^3}.$$

Inlocuind valorile găsite în expresia lui $\frac{d^2z}{dx^2}$ avem:

pentru $x=0,\ y=1;\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{9}{4}>0$, deci minim

pentru $x=0,\ y=5;\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{3}{4}>0$, deci minim

pentru $x=-2\sqrt{3}, y=4;\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{9}{2}>0$, deci maxim

pentru $x=2\sqrt{3},\ y=4;\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{9}{2}>0$, deci maxim

Calculând şi valorile de maxim şi minim, avem următorul tablou:

x	y	z	
0	1	1	minim absolut
0	5	25	minim
$-2\sqrt{3}$	4	28	Maxim
$2\sqrt{3}$	4	28	Maxim

Interpretarea geometrică.

Ecuaţia:

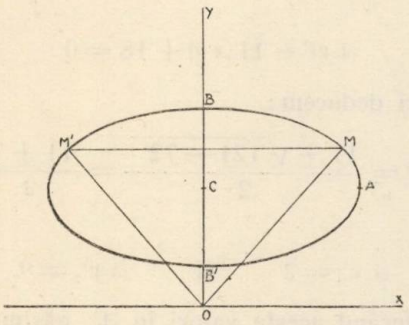
$$x^2 + 4y^2 - 24y + 20 = 0,$$

reprezintă o elipsă, ea se mai scrie sub forma:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

şi reprezintă elipsa A B A′ B′, cu centrul în C (0,3), având semiaxa mare de 4 şi semiaxa mică de 3.

Iar, $z = x^2 + y^2$ reprezintă patratul distanţei dela origine la un punct oarecare al elipsei.



Distanţele minime sunt O B şi O B′ de valori 5 şi 1, dintre acestea O B′ reprezintă *minimul absolut.*

Pentru a obţine distanţele maxime, ducem dreapta $y = 4$, ea întâlneşte elipsa în punctele M şi M′, deci distanţele maxime sunt O M şi O M′ de valoare $\sqrt{28}$.

D-l *Negrea A. Mircea* (Brăila) a dat o soluţie, reducând funcţiunea la o funcţiune de o singură variabilă.

1303. — *Să se arate că în orice triunghiu avem:*

$$\sum \frac{r_a^2 - r_b^2}{a-b} = \sum a \operatorname{cotg}^2 \frac{A}{2}, \quad \sum \frac{a^2-b^2}{r_a - r_b} = \sum \frac{a^2}{r_a}$$

ADRIAN POPESCU

Folosind formulele cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p-a}, \; s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$tg \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

putem scri succesiv:

$$\frac{r_a^2 - r_b^2}{a-b} = \frac{s^2}{a-b}\left[\frac{1}{(p-a)^2} - \frac{1}{(p-b)^2}\right] =$$

$$\frac{s^2\left[(p-b)^2 - (p-a)^2\right]}{(a-b)(p-a)^2(p-b)^2} = \frac{s^2(2p-a-b)(a-b)}{(a-b)(p-a)^2(p-b)^2}$$

$$= \frac{c\,s^2}{(p-a)^2(p-b)^2} = \frac{c\,p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)^2(p-b)^2}$$

$$= \frac{c\,p(p-c)}{(p-a)(p-b)} = c \operatorname{cotg} \frac{C}{2}.$$

Rezultă deci:

$$\sum \frac{r_a^2 - r_b^2}{a-b} = \sum a \operatorname{cotg} \frac{A}{2},$$

care este prima relaţiune.

De asemeni putem scri succesiv:

$$\frac{a^2-b^2}{r_a - r_b} = \frac{a^2-b^2}{\frac{s}{p-a} - \frac{s}{p-b}} = \frac{(a^2-b^2)(p-a)(p-b)}{s(a-b)}$$

$$= \frac{(a+b)\left[p^2 - (a+b)p + ab\right]}{s}.$$

De aci deducem:

$$(1) \quad \sum \frac{a^2-b^2}{r_a - r_b} = \frac{p^2 \Sigma(a+b) - p\Sigma(a+b)^2 + \Sigma ab(a+b)}{s}.$$

Cum avem evident:

$$\Sigma(a+b) = 2(a+b+c) = 4p,$$

$$\Sigma(a+b)^2 = (a+b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 =$$

$$4p^2 + a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\Sigma ab(a+b) = a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

$$= a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b),$$

rezultă că relaţiunea (1) se mai poate scri succesiv:

$$\sum \frac{a^2-b^2}{r_a - r_b} = \frac{4p^3 - 4p^3 - p(a^2+b^2+c^2)}{s} +$$

$$\frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{s} =$$

$$\frac{a^2(b+c-p) + b^2(c+a-p) + c^2(a+b-p)}{s} =$$

$$\sum \frac{a^2(p-a)}{s} = \sum \frac{a^2}{\frac{s}{p-s}} = \sum \frac{a^2}{r_a}.$$

Astfel şi relaţia 2-a din enunţ, este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu Marcel* ((lic. Buzeşti, Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Florescu Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* şi *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş).

1304. — *Să se afle restul divisiunii prin 81, a expresiunei:*

$$10^p - 9p + 2,$$

p fiind întreg şi positiv.

M. AMARASTEANU

E fiind expresia dată, se poate scri succesiv; folosind desvoltarea după binomul lui *Newton*:

$$E = (9+1)^p - 9p + 2 = \left(9^p + p \cdot 9^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} 9^{p-2} + \ldots + \frac{p(p-1)}{2} \cdot 9^2 + p \cdot 9 + 1 \right) - 9p + 2 = 9^2 \left(9^{p-2} + p \cdot 9^{p-3} + \ldots + \frac{p(p-1)}{2} \right) + p \cdot 9 + 1 - 9p + 2 = \text{mult} \cdot 81 + 3.$$

Rezultă că restul cerut este 3.

Soluţii date de d-nii: *Dobrescu Paul* (Târgovişte) şi *Cazanacli P.* (Chişinău).

Observare. S'au mai primit multe soluţii greşite.

1312. — *Dacă p este un număr pozitiv, să se arate că expresia:*

$$4^{2p} \times 16^{3p} - 2^{8p+1} + 1,$$

se divide prin 289[1].

TR. M. PREDOESCU

Insemnând cu E expresia dată, ea se mai poate scri succesiv:

$$E = 16^p \times 16^{3p} - 2 \times 16^{2p} + 1 =$$

$$16^{4p} - 2 \times 16^{2p} + 1 = (16^{2p} - 1)^2 =$$

$$[(17-1)^{2p} - 1]^2,$$

sau încă:

$$E = [\text{mult. } 17 + (-1)^2 - 1]^2 = (\text{mult } 17)^2 =$$

$$\text{mult. } 17^2 = \text{mult. } 289.$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Jorda R.* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Stoica D-tru* (lic. Milit., Tg Mureş).

[1]) Enunţ corectat.

1316. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^4 y + x y^4 = 18 \\ x^3 + y^3 = 11 - xy \end{cases}$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Din prima ecuaţie deducem:

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = \frac{18}{xy},$$

în virtutea căreia ecuaţia 2-a din enunţ devine:

$$\frac{18}{xy} = 11 - xy,$$

sau:

$$(xy)^2 - 11(xy) + 18 = 0.$$

De aci deducem:

$$xy = \frac{11 + \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2},$$

deci:

$$(xy)_1 = 2 \qquad \text{şi} \qquad (xy)_2 = 9.$$

Introducând aceste valori în (1), găsim că sistemul dat este echivalent cu următoarele două sisteme:

$$(2) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy = 2 \end{cases} \qquad (3) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy = 9 \end{cases}$$

Să rezolvăm întâi sistemul (2). Din ecuaţia 2-a a sistemului (2), deducem:

$$(4) \qquad y = \frac{2}{x},$$

care introdusă în prima, ne dă:

$$x^3 + \frac{8}{x^3} = 9,$$

sau:

$$(x^3)^2 - 9(x^3) + 8 = 0.$$

De aci deducem:

$$x^3 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2},$$

deci:

$$x^3 = 1 \qquad \text{şi} \qquad x^3 = 8.$$

Aceste ecuaţii putându-se scri respectiv:

$$x^3 - 1 = 0 \qquad \text{şi} \qquad x^3 - 2^3 = 0,$$

ele se pot descompune astfel:

$$(x-1)(x^2-x+1)=0$$

şi

$$(x-2)(x^2-2x+4)=0,$$

care rezolvate ne dau respectiv:

$$\begin{cases} x=1 \\ x=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x=2 \\ x=1\pm i\sqrt{3}, \end{cases} \quad (i=\sqrt{-1})$$

Inlocuind aceste valori în (4), obţinem valorile corespunzătoare pentru y, astfel că sistemul (2) admite următoarele şase sisteme de soluţii:

$$(5)\quad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{4}{1\pm i\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1\pm i\sqrt{3} \\ y=\dfrac{2}{1\pm i\sqrt{3}} \end{cases}$$

Să rezolvăm acum şi sistemul (3). Din ecuaţia 2-a din (3), deducem:

$$(6)\qquad y=\frac{9}{x},$$

în virtutea căreia prima devine:

$$x^3+\frac{729}{x^3}=2,$$

sau:

$$(x^3)^2-2(x^3)+729=0,$$

care rezolvată ne dă:

$$(7)\qquad x^3=1\pm\sqrt{1-729}=1\pm i\sqrt{728}, \quad (i=\sqrt{-1})$$

Inlocuind pentru simplificarea scrierii:

$$(8)\quad \sqrt[3]{1+i\sqrt{728}}=\alpha, \quad \sqrt[3]{1-i\sqrt{728}}=\beta,$$

rezultă că ecuaţiile (7), devin respectiv:

$$x^3-\alpha^3=0 \qquad \text{şi} \qquad x^3-\beta^3=0.$$

Cum ele se descompun astfel:

$$(x-\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)=0$$

şi:

$$(x-\beta)(x^2-\beta x+\beta^2)=0,$$

admit rădăcinele:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ x=\dfrac{\alpha(1+i\sqrt{3})}{2} \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} x=\beta \\ x=\dfrac{\beta(1\pm i\sqrt{3})}{2}, \end{cases} \quad (i=\sqrt{-1}),$$

care înlocuite în (6), ne procură impreună, următoarele şase sisteme de soluţii:

$$(8)\quad \begin{cases} x=\alpha \\ y=\dfrac{9}{\alpha} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\alpha(1+i\sqrt{3})}{2} \\ y=\dfrac{18}{\alpha(1\pm i\sqrt{3})} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\beta \\ y=\dfrac{9}{\beta} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\dfrac{\beta(1\pm i\sqrt{3})}{2} \\ y=\dfrac{18}{\beta(1\pm i\sqrt{3})} \end{cases}$$

unde α şi β au valorile date de (8).

In total sistemul dat admite 12 sisteme de soluţii cuprinse în (5) şi (8).

Au soluţionat complect problema, d-ra: *Popescu Maria* (studentă, Bucureşti) şi d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Buzincu Ioan* (lic. Milit, Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Florescu Gh. Haralambie, Grumăzescu Mircea* (Şc. Ofiţeri de Artilerie, Timişoara), *Hompola T.* (lic. Beiuş), *Loziciu D. Ilie* (student, Cluj), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş).

Au găsit numai o parte din sistemele de soluţii, d-nii: *Birek Vasile* (lic. Beiuş), *Bucur N. Virgil* (lic. Naţional, Iaşi), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Enăşescu D, D-tru Victor* (lic. Milit, Iaşi), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi). *Dumitru C. Isac* (lic. Milit., Iaşi), *Marnea Desideriu* (lic. Beiuş), *Maşcas Gh. Petre* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Mihalcea I. Octavian* (lic Buzău), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş) şi *Săvulescu Spirea.*

1317. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$4\sin^4 4x+4\cos^4 4x+\cos 4x=4\sin^4 x+4\cos^4 x$$

TEODOR MARSIEU

Ecuaţia dată se mai poate scri:

$$4\left[(\sin^2 4x+\cos^2 4x)^2-2\sin^2 4x\cos^2 4x\right]+$$

$$1-2\sin^2 2x=4\left[(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x\right],$$

sau încă:

$$4 - 8\sin^2 4x\cos^2 4x + 1 - 2\sin^2 2x = 4 - 8\sin^2 x\cos^2 x.$$

Această ecuație se mai poate scri, după simplificare:

$$1 - 2\sin^2 8x - 2\sin^2 2x = -2\sin^2 2x,$$

sau încă:

$$\sin^2 8x = \frac{1}{2},$$

de unde:

$$\sin 8x = \frac{1}{\pm\sqrt{2}},$$

de aci deducem soluțiile:

$$x = \frac{1}{8}\left[k\pi \pm (-1)^k \frac{\pi}{4}\right], \quad (k = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Soluții date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzești, Craiova), *Cehan G. Aristide, Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Gh. Haralambie, Grumăzescu Mircea* (Șc. de Ofițeri de Artilerie), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit. N Filipescu) și *Țițeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1393. — Să se găsească un cub perfect de forma $abcbdd$, știind că $a + c = 2b$.

PANAIT C. MAZILU

1394. — Dacă între numerile A, B, C există relațiunea:

$$A^2 = B^2 - C^2,$$

atunci numerile $B \pm C$ sau $\frac{B+C}{2}$ sunt patrate perfecte.

GENERAL GH. BUICLIU

1395. — Să se determine două drepte (D) și (Δ) din spațiu, astfel ca simetrica lui (D) față de (Δ) și simetrica lui (Δ) față de (D), să fie situate în același plan.

V. THÉBAULT

1396. — Se dă în plan poligonul $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ și se ia în același sens pe laturile $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots A_{n-1} A_n, A_n A_1$, segmentele $A_1 A_1', A_2 A_2', \ldots \ldots A_{n-1} A_{n-1}', A_n A_n'$ egale cu λ.

Se cere locul geometric al centrului de greutate al poligonului $A_1' A_2' A_3' \ldots A_n'$, când λ variază.

ION C. SCHILERU

1397. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + x^2 y^2 z^2 = 50 \\ xy + yz + zx = 11 \\ (x + y + z)(x + y + z + xyz) = 72 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1398. — Să se afle minimul sumei:

$$S = x + 2xy + 3xyz + 4xyzt,$$

știind că:

$$xy^2z^3t^4 = k, \qquad (k, \text{constant}),$$

x, y, z, t fiind variabile independente.

V. ALACI

1399. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x} + \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} + \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\operatorname{cosec} x} + \frac{\operatorname{cosec} x + \sec x}{\sec x} + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cot} x}{\operatorname{cot} x} = 20.$$

LT C. V. COSTACHESCU

1400. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu oarecare, să se stabilească relația:

$$p\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + 3\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\right) = 4R(\cos A + \cos B + \cos C).$$

VASILE GHIOCEL

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

ANUL XV. 15 IULIE 1935 No. 5.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIBERIU POPOVICI: DESPRE EXTRAGEREA RADACINII DINTR'UN POLINOM DE O VARIABILA INDEPENDENTA
2. V. THÉBAULT: TRIANGLE BORDÉ DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX.
3. NOTE MATEMATICE: 9, 10.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 310, 1108, 1168, 1201, 1238, 1313.
6. PROBLEME PROPUSE: 1341-1348.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

DESPRE EXTRAGEREA RĂDĂCINII DINTR'UN POLINOM DE O VARIABILĂ INDEPENDENTĂ

DE TIBERIU POPOVICI
Cluj.

1. Fie:

$$P(x) = a_0 x^{2m} + \cdots + a_{2m}, \qquad (a_0 \neq 0)$$

un polinom de gradul $2m$ în x. Prin definiţie rădăcina patrată a acestui polinom, este un alt polinom:

$$Q(x) = b_0 x^m + \cdots + b_m,$$

de gradul m astfel determinat încât diferenţa:

$$P(x) - (Q(x))^2,$$

să fie un polinom de grad cel mult egal cu $m-1$.

Polinomul $Q(x)$ e complect determinat afară de semn. Să presupunem că ar exista două polinoame $Q_1(x)$ şi $Q_2(x)$ verificând această proprietate. Am avea atunci:

$$P(x) \equiv (Q_1(x))^2 + R_1(x) \equiv (Q_2(x))^2 + R_2(x),$$

Q_1, Q_2 fiind de gradul m, iar R_1, R_2 de grad cel mult egal cu $m-1$. Se deduce imediat că:

$$(Q_1(x))^2 - (Q_2(x))^2 \equiv [Q_1(x) - Q_2(x)][Q_1(x) + Q_2(x)]$$
$$\equiv R_2(x) - R_1(x) \equiv \text{polinom de grad} \leq m-1,$$

deci:

$$Q_1(x) \equiv Q_2(x) \qquad \text{sau} \qquad Q_1(x) \equiv -Q_2(x).$$

Noi vom presupune $a_0 = 1$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$ reali. Vom lua $b_0 = 1$, atunci toţi coeficienţii $b_1, b_2, \ldots, b_m$ vor fi reali şi determinaţi fără ambiguitate. Calculul lor se face prin identificare, după cum e bine cunoscut.

2. Să reamintim acum câteva proprietăţi din teoria polinoamelor. Fie $f(x) = 0$ o ecuaţie algebrică de gradul n şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile acestei ecuaţii. Avem atunci:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i},$$

de unde rezultă că dacă notăm:

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k \qquad (s_0 = n)$$

şi pentru x destul de mare avem desvoltarea:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \frac{s_2}{x^3} + \cdots + \frac{s_k}{x^{k+1}} + \cdots$$

Să mai reamintim proprietatea că numărul perechilor de rădăcini imaginar conjugate ale ecuaţiei, este egal cu numărul variaţiilor de semn prezentate de şirul:

$$D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n,$$

unde:

$$D_k = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{k-1} & s_k & s_{k+1} & \ldots & s_{2k-2} \end{vmatrix} \qquad (D_1 = s_0 = n).$$

In particular, dacă D_k sunt toţi pozitivi (sau mai general dacă sunt toţi pozitivi sau nuli) ecuaţia are toate rădăcinile reale.

Să observăm în fine că dacă $A(x)$, $B(x)$ sunt două polinoame de grad respectiv egal cu α, β $(\alpha < \beta)$ şi dacă desvoltăm raportul:

$$\frac{A(x)}{B(x)},$$

[1]) In tot ceeace urmează vom presupune că coeficienţii polinoamelor considerate sunt toţi reali.

după puterile lui $\frac{1}{x}$ această desvoltare începe cu $\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$.

3. Să revenim acum la polinomul $P(x)$ având $Q(x)$ ca rădăcină patrată.

Avem:

$$P(x) \equiv (Q(x))^2 + R(x)$$

($R(x)$ polinom de grad $\leq m-1$)

$$\frac{2Q'(x)}{Q(x)} - \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{2Q'(x)}{Q(x)} - \frac{2Q(x)Q'(x)+R'(x)}{(Q(x))^2+R(x)}$$

$$\frac{2Q'(x)R(x) - Q(x)R'(x)}{Q(x)[(Q(x))^2+R(x)]} = \frac{\text{polinom de grad} \leq 2m-2}{\text{polinom de grad } 3m}$$

și desvoltarea după puterile lui $\frac{1}{x}$ a acestui cât, începe cu $\frac{1}{x^{m+2}}$.

Fie S_k, S_k' sumele s_k corespunzătoare ecuațiilor $P(x)=0$, $Q(x)=0$, avem atunci:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{S_0}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \cdots + \frac{S_k}{x^{k+1}} + \cdots$$

$$\frac{2Q'(x)}{Q(x)} = \frac{2S_0'}{x} + \frac{2S_1'}{x^2} + \cdots + \frac{2S_k'}{x^{k+1}} + \cdots$$

Rezultă așa dar că:

$$S_k = 2S_k', \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Dacă notăm cu Δ_k, Δ_k' determinanții D_k corespunzători ecuațiilor $P(x)=0$, $Q(x)=0$, avem:

$$\Delta_k = 2^k \Delta_k', \qquad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m+2}{2}\right],$$

notând cu $[\alpha]$ întregii cuprinși în α.

Dacă presupunem că m este par $= 2p$ și dacă ecuația $P(x)=0$ are toate rădăcinile reale, $\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_{p+1}'$ sunt pozitivi, deci șirul:

$$\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_{2p}',$$

nu poate prezenta mai mult de $p-1$ variații de semn. Deducem dar proprietatea.

Dacă un polinom de gradul 4 p egalat cu zero, ne dă o ecuație având toate rădăcinile reale, rădăcina patrată a acestui polinom egalat cu zero ne dă o ecuație de gradul 2p, având cel puțin două rădăcini reale.

4. Dacă știm că restul $R(x)$ este de grad mai mic decât $m-1$, putem enunța o proprietate mai precisă. Dacă $R(x)$ este de grad cel mult egal cu $m-i-1$, avem imediat ca mai sus:

$$S_k = 2S_k', \qquad k = 0, 1, \ldots, m+i$$

$$\Delta_k = 2^k \Delta_k', \qquad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m+i+2}{2}\right].$$

Dacă presupunem că $P(x)=0$ are toate rădăcinile reale, șirul:

$$\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_m',$$

va prezenta cel mult $m - \left[\frac{m+i+2}{2}\right]$ variații de semn și vom deduce proprietatea.

Dacă un polinom de gradul 2 m egalat cu zero, ne dă o ecuație cu toate rădăcinile reale, rădăcina patrată a acestui polinom egalat cu zero, ne dă o ecuație de gradul m, având cel puțin $2\left[\frac{m+i+2}{2}\right] - m$ *rădăcini reale, presupunând că restul extragerei rădăcinei este de grad* $\leq m-i-1$.

Dacă $i = m-2$, vedem că, *dacă* $P(x)=0$ *are toate rădăcinile reale și dacă restul* $R(x)$ *se reduce la o constantă, ecuația* $Q(x)=0$, *are toate rădăcinile reale.* Acest rezultat se poate *obține și direct.*

Dacă $i = m-1$, $2\left[\frac{m+i+2}{2}\right] - m = m$,

ceeace are de altfel evident, deoarece în acest caz $P(x)$ este un patrat perfect.

5. In loc de rădăcina patrată, putem lua rădăcina de ordinul r, a unui polinom de gradul $r\,m$. Fie deci:

$$P(x) = a_0 x^{rm} + \cdots + a_{rm}$$

și $Q(x) = b_0 x^m + \cdots + b_{rm}$ rădăcina sa de ordinul r, care prin definiție este așa fel, ca diferența:

$$R(x) = P(x) - (Q(x))^r,$$

să fie un polinom de grad cel mult egal cu $rm - m - 1$. Afară de un factor constant, $Q(x)$

este complect determinat. Intr'adevăr, dacă ar exista două polinoame de acest fel, am avea:

$$(Q_1(x))^r - (Q_2(x))^r = \text{polinom de grad} \leq r\,m - m - 1.$$

Rezultă că trebue să avem:

$$Q_1(x) \equiv \alpha\, Q_2(x),$$

unde α este o rădăcină de ordinul r a unităţii.

Dacă luăm $a_0 = 1$ şi $b_0 = 1$, coeficienţii b_i sunt complect determinaţi şi sunt reali, când presupunem (cum e cazul nostru) că a_i sunt reali.

In acest caz desvoltarea lui:

$$\frac{r\,Q'(x)}{Q(x)} - \frac{P'(x)}{P(x)},$$

după puterile lui $\frac{1}{x}$ începe cu $\frac{1}{x^{m+2}}$.

Dacă mai general, presupunem că $R(x)$ este cel mult de grad $r\,m - m - i - 1$, desvoltarea va începe cu $\frac{1}{x^{m+i+2}}$.

Vom avea deci, notând iarăşi cu S_k, S'_k sumele s_k corespunzătoare şi cu Δ_k, Δ'_k determinanţii D_k corespunzători ecuaţiilor $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$:

$$S_k = r\,S'_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, m + i$$

$$\Delta_k = r^k\,\Delta'_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m+i+2}{2}\right].$$

Avem aşa dar proprietatea următoare:

Dacă un polinom de gradul $r\,m$, egalat cu zero, ne dă o ecuaţie cu toate rădăcinile reale, rădăcina de ordinul r a acestui polinom, ne dă o ecuaţie, având cel puţin $2\left[\frac{m+i+2}{2}\right] - m$ *rădăcini reale, presupunând că restul extragerei rădăcinei, este de grad cel mult egal cu* $r\,m - m - i - 1$.

In particular dacă $i = m - 2$, avem proprietatea:

Dacă $P(x) = 0$, *unde polinomul* $P(x)$ *este de gradul* $r\,m$, *are toate rădăcinile reale şi dacă restul extragerei rădăcinei de ordinul r din acest polinom este de grad cel mult egal cu* $r\,m - 2\,m + 1$, *atunci rădăcina de ordin r a lui* $P(x)$, *egalat cu zero, ne dă o ecuaţie de gradul m cu toate rădăcinile reale.*

6. Să presupunem că $i = m$, atunci avem şi:

$$\Delta_{m+1} = r^{m+1}\,\Delta'_{m+1},$$

dar Δ'_{m+1} este nul pentru orice polinom de gradul m. Rezultă că:

$$\Delta_{m+1} = 0.$$

Dacă presupunem că rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$ sunt toate reale, condiţia $\Delta_{m+1} = 0$ atrage după sine şi:

$$\Delta_{m+2} = \Delta_{m+3} = \cdots = \Delta_{r\,m} = 0$$

şi în acest caz, ecuaţia considerată are cel mult m rădăcini distincte. Prin urmare:

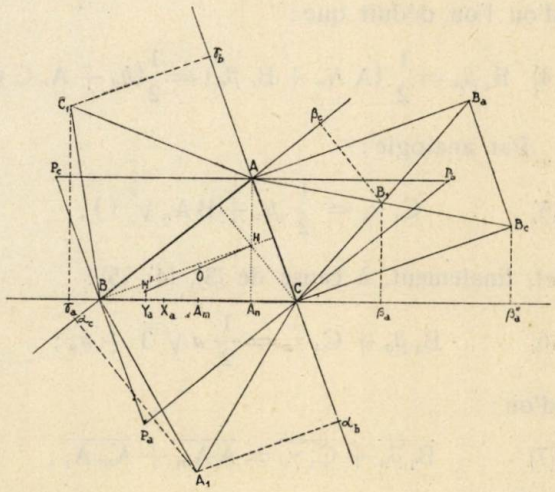
Dacă ecuaţia $P(x) = 0$, *unde* $P(x)$ *este un polinom de gradul $r\,m$, are toate rădăcinile reale şi dacă ştim că restul extragerei rădăcinei de ordin r din acest polinom este de grad cel mult egal cu* $r\,m - 2\,m - 1$, *atunci ecuaţia considerată* $P(x) = 0$ *are cel mult m rădăcini distincte.*

TRIANGLE BORDÉ DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

PAR

V. THÉBAULT
Le Mans (France).

1. *Notations.* Soient A_m, B_m, C_m les milieux des côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ d'un triangle



ABC; A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2 les sommets

des triangles équilatéraux construits extérieurement et intérieurement sur BC, CA, AB; O le centre du cercle circonscrit, de rayon R; H l'orthocentre; K le point de *Lemoine*; h_a, h_b, h_c, les longueurs des hauteurs AA_n, BB_n, CC_n; S l'aire du triangle; θ l'angle de *Brocard*.

Désignons par α_b et α_c, α'_b et α'_c les projections des points A_1 et A_2 sur les côtés AC et AB; par β_c et β_a, β'_c et β'_a celles des points B_1, B_2 sur les côtés BA et BC; par γ_a et γ_b, γ'_a et γ'_b celles des points C_1 et C_2 sur les côtés CB et CA.

2. Proposons-nous de construire les résultantes des neuf forces:

$$(1)\quad (\overline{A_1A_m}, \overline{A_1\alpha_b}, \overline{A_1\alpha_c}),\quad (\overline{B_1\beta_a}, \overline{B_1B_m}, \overline{B_1\beta_c}),\quad (\overline{C_1\gamma_a}, \overline{C_1\gamma_b}, \overline{C_1C_m}),$$

puis des neuf forces:

$$(2)\quad (\overline{A_2A_m}, \overline{A_2\alpha'_c}, \overline{A_2\alpha'_a}),\quad (\overline{B_2\beta'_a}, \overline{B_2B_m}, \overline{B_2\beta'_c}),\quad (\overline{C_2\gamma'_a}, \overline{C_2\gamma'_b}, \overline{C_2C_m}),$$

appliquées trois par trois aux points A_1, B_1, C_1 et A_2, B_2, C_2.

Considérons, par exemple, le rectangle CAB_aB_c dont le point B_1 est le centre; soit β''_a la projection du sommet B_c sur BC. Les triangles rectangles semblables $CB_c\beta''_a$ et ACA_n donnent:

$$(3)\quad B_c\beta''_a = A_nC\sqrt{3},\quad C\beta''_a = AA_n\sqrt{3} = h_a\sqrt{3};$$

d'ou l'on déduit que:

$$(4)\quad B_1\beta_a = \frac{1}{2}(AA_n + B_c\beta''_a) = \frac{1}{2}(h_a + A_nC\sqrt{3}).$$

Par analogie:

$$(5)\qquad C_1\gamma_a = \frac{1}{2}(h_a + BA_n\sqrt{3}),$$

et, finalement, à cause de (3), (4), (5):

$$(6)\qquad B_1\beta_a + C_1\gamma_a = \frac{1}{2}a\sqrt{3} + h_a;$$

d'où:

$$(7)\qquad \overline{B_1\beta_a} + \overline{C_1\gamma_a} = \overline{AA_m} + \overline{A_mA_1},$$

soit:

$$(8)\qquad \overline{A_1A_m} + \overline{B_1\beta_a} + \overline{C_1\gamma_a} = \overline{AA_n} = h_a.$$

On a aussi:

$$(9)\quad \beta_a\gamma_a = \beta_aA_n + A_n\gamma_a = \frac{1}{2}a + h_a\sqrt{3}.$$

La résultante des forces parallèles et de même sens $\overline{B_1\beta_a}$, $\overline{C_1\gamma_a}$ rencontre le côté BC en un point X_a tel que l'on a, en grandeur et en signe:

$$(10)\qquad \gamma_aX_a = \beta_a\gamma_a\cdot\frac{B_1\beta_a}{B_1\beta_a + C_1\gamma_a},$$

puis:

$$(11)\quad X_aA_m = \frac{1}{2}\beta_a\gamma_a - \gamma_aX_a - \frac{1}{2}A_mA_n;$$

d'où, en vertu de (6), (7), (10):

$$(12)\quad X_aA_m = \frac{1}{4}(a+2h_a\sqrt{3})\cdot\left[1-\left(\frac{h_a+A_nC\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}+h_a}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{2}A_mA_n = \frac{h_a\,.\,A_mA_n}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}+h_a}.$$

La résultante des forces $\overline{\varrho} = (\overline{B_1\beta_a} + \overline{C_1\gamma_a})$ et $\overline{A_1A_m}$ coupe à son tour le côté BC en un point Y_a pour lequel on a, en grandeur et en signe:

$$(13)\quad Y_aA_m = X_aA_m\cdot\frac{\overline{\varrho}}{\overline{A_1A_m} + \overline{B_1\beta_a} + \overline{C_1\gamma_a}} = X_aA_m\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}+h_a\right)}{h_a};$$

d'où, en vertu de (12),

$$(14)\qquad Y_aA_m = A_mA_n.$$

Le symétrique Y_a du point A_n, par rapport à A_m, est donc sur la ligne d'action de la résultante des forces $(\overline{A_1A_m}, \overline{B_1\beta_a}, \overline{C_1\gamma_a})$ et ces trois forces ont une résultante équipollente à la hauteur AA_n du triangle ABC et portée par la perpendiculaire à BC en Y_a. Par analogie, les symétriques Y_b et Y_c de B_n et C_n, par rapport à B_m et C_m, sont situés sur les lignes d'action des forces $(\overline{A_1\alpha_b}, \overline{B_1B_m}, \overline{C_1\gamma_b})$ et $(\overline{A_1\alpha_c}, \overline{B_1\beta_c}, \overline{C_1C_m})$ et ces résultantes sont portées par les perpendiculaires à CA et AB aux points Y_b et Y_c. Par suite, *les résultantes des triples de forces précéd-*

passent par le symétrique H′ *de l'orthocentre* H *par rapport au centre* O *du cercle circonscrit au triangle* A B C.

Il résulte de la que la résultante des neuf forces (1) est aussi celle de trois forces $\overline{H'L_a}$, $\overline{H'L_b}$, $\overline{H'L_c}$ équipollentes aux hauteurs $\overline{AA_n}$, $\overline{BB_n}$, $\overline{CC_n}$ et appliquées à l'orthocentre H′ du triangle anticomplémentaire $P_aP_bP_c$ du triangle A B C. Si l'on applique à la figure formé par les forces $\overline{H'L_a}$, $\overline{H'L_b}$, $\overline{H'L_c}$ une translation de façon que H′ coïncide avec le centre O du cercle circonscrit au triangle, on retrouve une figure que nous avons déja considérée.[1]

La résultante $\overline{H'T'}$ des forces $\overline{H'L_a}$, $\overline{H'L_b}$, $\overline{H'L_c}$ est donc équipollente à la résultante $\overline{OT}$ de trois forces $\overline{OL'_a}$, $\overline{OL'_b}$, $\overline{OL'_c}$ équipollentes aux hauteurs du triangle A B C et appliquées au centre O du cercle circonscrit. Or, nous avons montré que :

$$(15)\qquad \overline{OT}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R^2}\cdot\overline{OK};$$

donc :

$$(16)\qquad [OT]=\frac{S}{R}\sqrt{\cot^2\theta-3}=[H'T'].$$

Des raisonnements analogues prouvent que la résultante des neuf forces (2) se confond avec celle $\overline{H'T'}$ des forces (1).

On peut donc énoncer ce théorème :

Les dix-huit forces représentées par les distances des sommets des triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle A B C *aux trois côtés de ce triangle ont pour résultante la force* $\overline{H'U'}$, dont l'intensité est :

$$[H'U']=\frac{2S}{R}\sqrt{\cot^2\theta-3},$$

appliquée à l'orthocentre du triangle anticomplémentaire.

Cette résultante est équipollente à la force :

$$\overline{OU}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2R^2}\cdot\overline{OK}=\frac{2S}{R}\cdot\overline{OK}\cot\theta,$$

placée sur le diamètre de Brocard O K *du triangle fondamental.*

N. B. — Nous donnerons prochainement dans *Mathesis* des théorèmes plus généraux concernant la configuration formée par un triangle bordé de triangles isoscèles semblables. V. T.

NOTE MATEMATICE

9. — *Asupra problemei 1185 „R. M. T".*

In această problemă propusă de d-l *M. D. Motoc*, cu soluţia dată în *„R. M. T.", Vol. XIV, pag. 46,* se cerea patratul *a b c d e* în care *c b e* este un cub şi *a d* un patrat.

Voi trata problema pe altă cale şi îi voi omite condiţia *a d* să fie patrat.

Cifra *e* fiind terminaţiune de patrat, cubul $cbe=125$; 216; 729, iar patratul *a b c d e* se poate termina numai cu 12 *d* 6 şi 27 *d* 9 (21 *d* 5 neputând fi terminaţiune de patrat pentru nici o valoare a lui *d*). Conform celor stabilite de subsemnatul în *„Gazeta Matematică", Vol. XXXVII, pag. 366 ş. u.* pot alcătui tabloul :

$N_5=$ *a b c d e*	*c d e*	$\sqrt{N_5}$	$100<\sqrt{N_4}<316$	N_5	Soluţii
a 1 2 1 6	2 1 6	$500n\pm96$	—	—	—
a 1 2 3 6	2 3 6	$500n\pm106$	106	11236	$106^2=11236$
a 1 2 5 6	2 5 6	$500n\pm16$	—	—	—
a 1 2 7 6	2 7 6	$500n\pm174$	174	30276	—
a 1 2 9 6	2 9 6	$500n\pm36$	—	—	—
a 2 7 2 9	7 2 9	$250n\pm27$	223 ; 277	49729 ; 76729	—
a 2 7 6 9	7 6 9	$250n\pm113$	113 ; 137	12769 ; 18769	$113^2=12769$

[1]) *Mathesis*, 1933 — supplément, p. 4.

Căutarea acestor soluţii a necesitat 6 ridicări la patrat.

In cazul particular al problemei 1185, $a\,d$ fiind patrat, pot omite forma $a\,1236$, d neputând fi 3 şi rămâne soluţia $113^2 = 12769$, *in căutarea căreia e necesar să ridic numai 5 numere la patrat.*

I. V. MATIES

10. — *O formulă de transformare a fracţiunilor zecimale în fracţiuni de un sistem oarecare de numărare.*

Dacă se consideră fracţiunile zecimale cuprinse între 0 şi 1, suntem conduşi de a da ca expresiune a acestor fracţiuni expresia:

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \qquad (a_n < 10 \text{ şi întregi})$$

Expresiunea (1) pentru un sistem oarecare de numeraţie t, devine:

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{t^n} \qquad (b_n < t \text{ şi întregi})$$

Pentru aceiaşi valoare a lui n (spre exemplu $n = 1$) putem scrie:

$$\frac{a_n}{10^n} = \frac{b_n}{t^n},$$

de unde:

$$(3) \qquad b_n = \frac{a_n t_n}{10^n}.$$

Exemplu: Aplicând formula (3) se găseşte pentru 0,125 scris în baza 10, 0,1 în baza 8, adică:

$$(0{,}125)_{10} = (0{,}1)_8.$$

MIHAIL BOTEZ

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XL, No. 10, Iunie 1935. Dare de seamă, asupra banchetului concursului „G. M." din 4 Maiu 1935, de *C. Ionescu-Bujor*. (Supliment). Rezultatele concursului „Gazetei Matematice", de *G. Ţiţeica*. Sur le théorème de *Feuerbach*, par *V. Thébault*. Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu*. Neegalităţi cu indicatori de ordin superior, de *Maior I. Linteş*. Raportul comisiunii pentru acordarea premiului „*V. Cristescu*", de *N. Botea*, *General Gh. Buicliu*, *Lt. C-dor Gh. Niculescu*. Premiul Bienal „Inginer *H. Capriel*", de *Al. Pantazi*, *O. N. Ţino*, *I. Busilă*.

2. *Ştiinţă şi Progres*, Revista ştiintifică a liceelor militare, anul II, No. 3—4, Iunie 1935. Teorema piesei de cinci lei a d-lui prof. *Ţiţeica*, de *G. Călugăreanu*. Furnicele şi Chimia, de *G. N. Gheorghiu*. O excursie în Banat, de *George Janet*. Condiţiile pentru a deveni un bun pilot, *C. Bursan*. Probleme rezolvate. Probleme propuse.

3. *Numerus*. Revistă de Matematici elementare pentru învăţământul secundar, normal, profesional şi militar; Director *R. N. Racliş*; Vol. I, Caetele 1—2, Iunie 1935. Abonament 90 lei, adresa Dr. *R. N. Racliş*, Alea Vulpache 21, Bucureşti 3.

Este bine tipărită şi cuprinde numeroase probleme interesante, adresate elevilor de la clasa I-a la a VIII-a secundară. In caetul No. 2 s'a început şi publicarea soluţiilor diferitelor probleme. Tot în aceste două caete s'a început a se tipări (şi va continua) minunata şi instructiva carte „La Géométrie du triangle", par *Tr. Lalesco*, care nu trebuie să lipsească nici unui elev şi nici unuia care se ocupă cu matematicele.

Recomandăm dar cu plăcere revista „*Numerus*" corespondenţilor nostrii.

PROBLEME REZOLVATE

310. — *Un obiect de aur şi argint are volumul v centimetri şi greutatea a grame. Ştiind că un centimetru cub de aur cântăreşte 19 grame şi că un centimetru cub de argint cântăreşte 10,5 grame, se cere să se calculeze greutatea de aur şi de argint conţinută în acel obiect. Să se calculeze ce volum să se dea acelui obiect pentru ca greutăţile de aur şi argint să fie exprimate în numere întregi de grame.*

G-L GH. BUICLIU

1°. Fie x şi y greutăţile de aur şi de argint conţinute în acel obiect; densitaţile aurului şi ale argintului fiind date egale cu 19 şi cu 10,5 ecuaţiile problemei sunt:

$$x + y = a$$

$$\frac{x}{19} + \frac{y}{10{,}5} = v.$$

Rezolvind acest sistem se găseşte:

$$(1) \qquad x = \frac{30\,a - 399\,v}{17}.$$

(2) $$y = \frac{399\,v - 21\,a}{17}.$$

2°. Din (1) se scoate:

$$17 \times x = 2 \times 17\,a - 23 \times 17\,v + 4\,a - 8\,v.$$

Pentru ca x să fie întreg trebue ca:

$$4\,a - 8\,v = 17\,m,$$

care are loc în numere întregi numai dacă:

$$m = 4\,u,$$

deci:

(3) $$a - 2\,v = 17 \times u$$

$$a - u = 2\,t$$

şi:

$$u = a - 2\,t.$$

Revenind la (3), găsim valoarea căutată:

(4) $$v = 17\,t - 8\,a,$$

care dusă în (1), dă:

(5) $$x = 190\,a - 390\,t,$$

unde t este un întreg arbitrar.

Ducând pe (4) în (2), se găseşte că şi y este întreg şi dat de formula:

(6) $$y = 399\,t - 189\,a.$$

Relaţia (4) răspunde deci la punctul al doilea al problemei. Trebuie însă observat că între volumul v şi greutatea a mai avem relaţiunea:

$$a = v \times d,$$

în care $d > 10{,}5$ este densitatea aliajului, densitate care nu este în general exprimată prin numere întregi ci printr-o fracţie $\frac{p}{q}$, deci:

$$a = v\,\frac{p}{q},$$

care dus în (4), dă:

(7) $$v = \frac{17\,t\,q}{8\,p + q}.$$

Rămâne acum de cercetat în ce cazuri, v dat de (7), este întreg. Observ că p şi q sunt primi între ei, căci în caz contrar, se poate simplifica fracţia $\frac{p}{q}$, deci q şi $8\,p + q$ nu pot avea alţi divizori comuni, de cât divizori lui 8. Fie deci:

$$q = m \times 2^n.$$

Când $n > 3$:

$$v = \frac{17\,.\,t\,.\,m\,.\,2^{n-3}}{p + m\,.\,2^{n-3}},$$

iar când $n \leqq 3$:

$$v = \frac{17\,.\,t\,.\,m}{2^{\alpha}\,.\,p + m} \qquad \text{cu } 0 < (\alpha < 3)$$

In cazul întâi $p + m\,2^{n-3}$ este prim cu $m\,.\,2^{n-3}$; în cazul al doilea $2^{\alpha}.\,p + m$ este prim cu m, deci pentru ca v să fie întreg, va trebui ca numitorul său să fie unul din divizorii lui $17\,.\,t$. Cu aceasta problema este complect rezolvată.

Observaţiuni. 1°. Am ales datele numerice ale problemei aşa fel, în cât numărătorul lui x şi al lui y să devină întregi pentru aceiaşi valoare (4) a lui v. In general însă dacă (1) devine întreg pentru:

$$v = \alpha\,a + \beta\,t,$$

iar (2) devine întreg pentru:

$$v = \alpha'\,a + \beta'\,t,$$

atunci va trebui să se găsiască valorile întregi ale lui t şi t' pentru care:

$$\alpha\,a + \beta\,t = \alpha'\,a + \beta'\,t'.$$

Fie:

$$t = f(0), \qquad t' = f_1(0)$$

acele valori. Soluţia problemei este:

$$v = \alpha\,a + \beta\,f(0) = \alpha'\,a + \beta'\,f_1(\alpha).$$

2°. După cum se vede din soluţie, s-a presupus că a şi v sunt numere întregi, după cum de altfel reese din enunţ, unde ar fi trebuit să adaug poate, pentru a evita confuziuni, cuvântul *întregi,* după cuvintele *centimetri* şi *grame* ai primei fraze.

3°. Dacă în loc de a lua ca necunoscute greutăţile, s-ar fi luat volumele x şi y de aur şi argint, care intră în compunerea obiectului, atunci sistemul de ecuaţii al problemei ar fi fost:

$$x + y = v$$

$$19\,x + 10{,}5\,y = a.$$

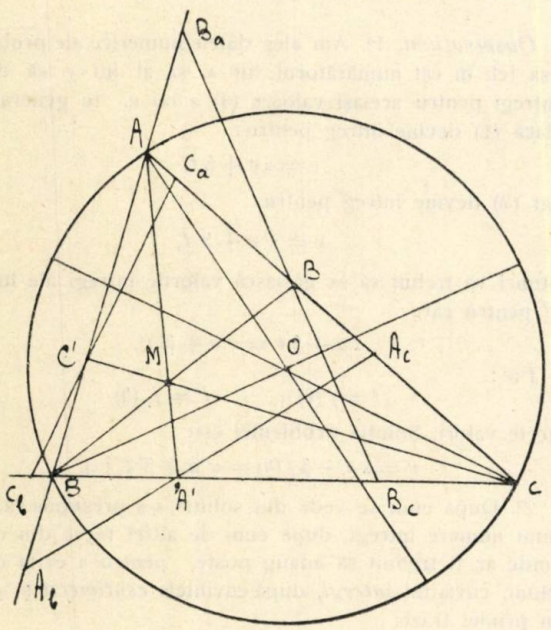
4°. Au rezolvat *numai* prima parte a problemei, utilizând sistemul din soluţia dată mai sus; d-nii: *Braiester O., Ionescu-Bujor Th. C., Ştefănescu Em.* şi *Teodorescu M. D.*

Au rezolvat de asemeni *numai* prima parte a problemei, utilizând însă sistemul de la 3° precedent, d-nii: *Beşchea N., Brădeţeanu C. Cornel, Comănescu-Bălteni Al., Flickstein I., Grofşoreanu I. Gh., Miu M. I., Percea Viorel, Popescu N. Cornel, Popovici Th. I., Silion Gh. I., Stoica N. Aureliu, Tărăbuţă C. Paul* şi *Teodorescu M. D.*

1108. — A B C *fiind triunghiul de referinţă şi* A′, B′, C′ *picioarele a trei ceviene concurente în* M, *perpendicularele duse din* A′, B′, C′ *respectiv pe diametrele* A O, B O, C O *ale cercului* A B C, *formează cu laturile unghiurilor corespunzătoare ale triunghiului de referinţă, trei triunghiuri ale căror cercuri circumscrise au drept centru radical punctul* M.

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

Notăm A_b, A_c punctele în care perpendiculara dusă din A′ pe diametrul A O întâlneşte laturile A B, A C şi B_c, B_a; C_a, C_b punctele obţinute analog.



Dreapta A_b A_c fiind perpendiculară pe diametrul A O, este paralelă cu tangenta în A la cercul A B C, deci antiparalelă laturei B C în unghiul A.

Punctele A_b, B, A_c, C sunt deci pe un cerc. Axele radicale ale acestui cerc cu cercurile A B C, A A_b A_c sunt B C, A_b A_c, în cât A′ e centrul radical al celor trei cercuri şi ca urmare A A′ este ax radical al cercurilor A B C, A A_b A_c. Analog, B B′ este axul radical al cercurilor A B C, B B_a B_c. Intersecţia M a dreptelor A A′, B B′ e centrul radical al cercurilor A B C, A A_b A_c, B B_a B_c, deci prin M va trece şi axul radical al cercurilor A A_b A_c, B B_a B_c. Analog dovedim că prin M trece şi axul radical al cercurilor A A_b A_c, C C_a C_b.

M este deci centrul radical al celor trei cercuri A A_b A_c, B B_c B_a, C C_a C_b, ceeace trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa) şi *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara).

1168. — *Să se dovedească că suma razelor cercurilor exînscrise unui triunghiu, este mai mare sau cel mult egală cu de nouă ori raza cercului înscris acelui triunghiu.*

GH. VASILIU LEOBEN

Considerăm relaţiile cunoscute:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r \tag{1}$$

$$d^2 = R(R - 2r), \tag{2}$$

d fiind distanţa de la centrul cercului înscris la centrul cercului circumscris („Culegere de Probleme Trigonometrie", pag. 404 şi „Exercices de Géométrie, par F. G. M", pag. 173).

Din (2) deducem:

$$R = 2r + \frac{d^2}{R},$$

care introdusă în (1) ne dă:

$$r_a + r_b + r_c = 9r + \frac{d^2}{R}. \tag{3}$$

Cum:

$$\frac{d^2}{R} \geqq 0,$$

rezultă din relaţia (3):

$$r_a + r_b + r_c \geqq 9r.$$

Semnul egal are loc numai când triunghiul este echilateral, căci atunci, $d = 0$.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu M.*, *Chiriac C-tin* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M.* (lic. Milit., Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (llc. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Ofiţeri de Artilerie), *Mazilu P.* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă-Neamţ Emilian* (student), *Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu Adrian*, *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Rezeanu P. M.* (T-Măgurele), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt), *Şuşală Gh.* (lic. Milit., Chişinău) şi *Tica P. Marin-Gal.*

1201. — *Câte cifre sunt necesare pentru a scrie şirul natural al numerilor de la 1 până la n?*

LT. COMANDOR GR. ZAPAN

Fie m numărul cifrelor numărului n. Cel mai mic număr de m cifre este 10^{m-1}. Vom calcula întâi numărul cifrelor necesar a scri numerile de la 1 la $10^{m-1}-1$ şi vom aduna apoi numărul cifrelor necesar a scri numerile începând cu 10^{m-1} până la n.

Numărul numerilor de k cifre este evident:

$$10^k - 10^{k-1} = 10^{k-1}(10-1) = 9\,10^{k-1},$$

iar numărul cifrelor necesar a scri aceste 9.10^{k-1} numere, este:

$$9\,k\,.\,10^{k-1}.$$

Dacă aci luăm pe rând $k = 1, 2, 3, \ldots (m-1)$ şi adunăm rezultatele, avem:

$$\sum_{k=1}^{m-1} 9\,k\,.\,10^{k-1},$$

care reprezintă numărul cifrelor necesar a scri numerile de la 1 la 10^{m-1}; iar numărul cifrelor necesar a scri numerile începând cu 10^{m-1} la n, este evident:

$$(n - 10^{m-1} + 1)\,m.$$

Rezultă dar că numărul cifrelor necesar a scri şirul natural al numerilor de la 1 la n, este:

$$(1) \qquad N = (n - 10^{m-1})\,m + \sum_{k=1}^{m-1} 9\,k\,.\,10^{k-1},$$

unde m este numărul cifrelor lui n.

Formula (1) se simplifică, calculând:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{m-1} 9\,k\,.\,10^{k-1} = 9\sum_{k=1}^{m-1} k\,.\,10^{k-1}.$$

Pentru aceasta derivăm relaţia cunoscută:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1} = \frac{x^m - 1}{x - 1},$$

care scrie suma termenilor unei progresii geometrice şi avem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (m-1)x^{m-2} = \frac{m\,x^{m-1}(x-1) - x^m + 1}{(x-1)^2},$$

sau:

$$\sum_{k=1}^{m-1} k\,.\,x^{k-1} = \frac{(m-1)\,x^m - m\,.\,x^{m-1} + 1}{(x-1)^2},$$

unde luând $x = 10$, ne dă pentru (2):

$$\sum_{k=1}^{m-1} 9\,.\,k\,10^{k-1} = \frac{(m-1)\,10^m - m\,.\,10^{m-1} + 1}{9}.$$

In virtutea acestei relaţii, (1) devine:

$$N = (n - 10^{m-1} + 1)\,m + \frac{(m-1)\,10^m - m\,.\,10^{m-1} + 1}{9},$$

care se mai poate scri:

$$N = (n+1)\,m - \frac{10^m - 1}{9},$$

sau:

$$N = (n+1)\,m - \underbrace{11\ldots1}_{(m \text{ de } 1)},$$

Aceasta este formula cu care putem calcula numărul cifrelor necesare pentru a scrie şirul natural al numerilor de la 1 la n, unde m este numărul cifrelor lui n.

S'au primit soluţii insuficiente de la unii d-ni corespondenţi.

1238. — *Să se stabilească relaţia:*

$$I_q^4 = \begin{vmatrix} -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 & C_q^4 \\ 1 & -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 \\ 0 & 1 & -C_q^1 & C_q^2 \\ 0 & 0 & 1 & -C_q^1 \end{vmatrix},$$

ştiind că C_m^n înseamnă combinări a m obiecte luate câte n şi I_m^n înseamnă combinări cu repetiţie a m obiecte luate câte n. Să se generalizeze relaţia dată.

V. ALACI

Insemnând cu Δ_4 determinantul din enunţ şi dezvoltându'l după elementele primei coloane, apoi

dezvoltând după regula lui *Sarrus* determinanții de ordinul al 3-lea obținuți, putem scri succesiv:

$$(1)\quad \Delta_4 = -C_q^1 \begin{vmatrix} -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 \\ 1 & -C_q^1 & C_q^2 \\ 0 & 1 & -C_q^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} C_q^2 & -C_q^3 & C_q^4 \\ 1 & -C_q^1 & C_q^2 \\ 0 & 1 & -C_q^1 \end{vmatrix} =$$

$$(C_q^1)^4 + C_q^1 C_q^3 - 2(C_q^1)^2 C_p^2 - (C_q^1)^2 C_q^2 - C_q^4 + (C_q^2)^2 + C_q^1 C_q^3 = (C_q^1)^4 - 3(C_q^1)^2 C_q^2 + 2 C_q^1 C_q^3 + (C_q^2)^2 - C_q^4.$$

Ținând seamă că:

$$C_q^1 = q, \quad C_q^2 = \frac{q(q-1)}{2!}, \quad C_q^3 = \frac{q(q-1)(q-2)}{3!},$$

$$C_q^4 = \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!},$$

relația (1) devine:

$$\Delta_4 = q^4 - \frac{3q^3(q-1)}{2} + \frac{2q^2(q-1)(q-2)}{6} + \frac{q^2(q-1)^2}{4} - \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{24} =$$

$$q^4 - \frac{q(q-1)(36q^2 - 8q^2 + 16q - 6q^2 + 6q + q^2 - 5q + 6)}{24}$$

$$= \frac{q}{24}[24q^3 - (q-1)(23q^2 + 17q + 1)] =$$

$$\frac{q}{24}(q^3 + 6q^2 + 11q + 6) = \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{24}.$$

Cum:

$$\frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{4!} = I_q^4,$$

rezultă:

$$\Delta_4 = I_q^4,$$

și astfel relația dată este stabilită.

Generalizare. Să se arate mai general că există relația:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 \ldots (-1)^n & C_q^n \\ 1 & -C_q^1 & C_q^2 \ldots (-1)^{n-1} & C_q^{n-1} \\ 0 & 1 & -C_q^1 \ldots (-1)^{n-2} & C_q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & -C_q^1 \end{vmatrix} = (-1)^n I_q^n$$

Dezvoltând după elementele primei linii, avem:

$$\Delta_n = -C_q^1 \begin{vmatrix} -C_q^1 & C_q^2 \ldots (-1)^{n-1} & C^{n-1} \\ 1 & -C_q^1 \ldots (-1)^{n-2} & C^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & -C_q^1 \end{vmatrix} -$$

$$C_q^2 \begin{vmatrix} 1 & C_q^2 \ldots (-1)^{n-1} & C_q^{n-1} \\ 0 & -C_q^1 \ldots (-1)^{n-2} & C_q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & -C_q^1 \end{vmatrix} -$$

$$C_q^3 \begin{vmatrix} 1 & -C_q^1 & C_q^3 & C_q^4 \ldots (-1)^{n-1} & C_q^{n-1} \\ 0 & 1 & C_q^2 & -C_q^3 \cdots (-1)^{n-2} & C_q^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & -C_q^1 \end{vmatrix} - \ldots$$

$$\ldots - C_q^n \begin{vmatrix} 1 & C_q^1 \ldots (-1)^{n-2} & C_q^{n-2} \\ 0 & 1 \ldots (-1)^{n-3} & C_q^{n-3} \\ 0 & 0 \quad 1 \ldots\ldots\ldots & \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots & 1 \end{vmatrix}$$

In virtutea notației din enunț, determinanții din membrul al 2-lea sunt respectiv:

$$\Delta_{n-1}, \Delta_{n-2}, \Delta_{n-3}, \ldots \Delta_1 = -C_q^1, \Delta_0 = 1,$$

astfel că avem:

$$(1)\quad \Delta_n = -C_q^1 \Delta_{n-1} - C_q^2 \Delta_{n-2} - C_q^3 \Delta_{n-3} - \ldots$$

$$\ldots - C_p^{n-1} \Delta_1 - C_q^n.$$

Acum vom intrebuința metoda inducției complecte, adică vom presupune că relația din enunț este adevărată când în locul lui n luăm $1, 2, 3, \ldots, n-1$ și vom arata apoi că ea este adevărată și pentru n.

In adevăr, în baza acestei presupuneri, putem scri:

$$\Delta_{n-1}=(-1)^{n-1}\,\Gamma_q^{n-1},\quad \Delta_{n-2}=(-1)^{n-2}\,\Gamma_q^{n-2},\ldots,$$
$$\Delta_1=-\Gamma_q^1,$$

şi atunci relaţia (1) devine:

$$(2)\quad \Delta_n=(-1)^n\left[C_q^1\,\Gamma_q^{n-1}-C_q^2\,\Gamma_q^{n-2}+C_q^3\,\Gamma_q^{n-3}-\cdots\right.$$
$$\left.\cdots+(-1)^{n-1}\,C_q^{n-1}\,\Gamma_q^1+(-1)^n\,C_q^n\right].$$

Dar considerând identitatea:

$$1=(1+x)^q\,(1+x)^{-q},$$

unde presupunem $|x|<1$, dezvoltând după binomul lui *Newton*, avem:

$$1=(1+C_q^1x+C_q^2x^2+\ldots+C_q^q)$$
$$=(1-\Gamma_q^1x+\Gamma_q^2x^2-\Gamma_q^3x^3+\cdots),$$

şi identificând coeficienţii lui x^n din ambii membrii, obţinem:

$$0=C_q^n-C_q^{n-1}\Gamma_q^1+C_q^{n-2}\Gamma_q^2-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}C_q^1\Gamma_q^{n-1}+(-1)^n\Gamma_q^n,$$

de unde deducem:

$$\Gamma_q^n=C_q^1\Gamma_q^{n-1}-C_q^2\Gamma_q^{n-2}+C_q^3\Gamma_q^{n-3}-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}C_q^{n-1}\Gamma_q^1+(-1)^nC_q^n.$$

In virtutea acestei identităţi, relaţia (2) devine:

$$(3)\qquad \Delta_n=(-1)^n\Gamma_q^n.$$

Cum această relaţie (3) este adevărată pentru $n=1$ $n=2$, căci avem în adevăr:

$$\Delta_1=-C_q^1=-q=(-1)\Gamma_q^1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-C_q^1 & C_q^2\\ 1 & -C_q^1\end{vmatrix}=q^2-\frac{q(q-1)}{2}=\frac{q(q+1)}{2}$$
$$=(-1)^2\Gamma_q^2,$$

ea este adevărată în general pentru n intreg pozitiv oarecare, cum rezultă din metoda inducţiei complecte de mai sus.

Soluţie analoagă dată de d-l *Cazanacli V. Petre* (Iaşi).

Au stabilit relaţia din enunţ fără a o generaliza, d-ra: *Oţel Taţiana* (studentă, Cluj) şi d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Apostol Gh. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac I. C.*, *Marteş Grigore* (lic. Milit., Chişinău), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Sâmbatin Gh.* (Sub-Lt).

1313. — *Să se găsească un număr de două cifre astfel că scriindu-l succesiv de două ori şi punând înaintea lui suma cifrelor sale, să ne dea un număr de cinci cifre patrat perfect.*

D-TRU BALEANU

Fie $a\,b$ numărul de două cifre cerut, $a\neq 0$ şi cum el este terminaţiunea unui patrat perfect, poate fi:

16, 21, 24, 25, 36, 41, 44, 61, 81, fiindcă $a+b\leq 9$. (Culegere de Probleme de Aritmetică, Cap. XXXIX).

Rezultă, conform enunţului, că patratul perfect de cinci cifre, se găseşte printre numerile:

71616, 32121, 62424, 72525, 93636,
54141, 84444, 76161, 98181.

Numerile: 71616, 72525, 54141, 84444, 76161 fiind divizibile cu 3 fără a fi şi cu 9, nu sunt patrate perfecte, iar din numerile rămase, numai 93636 este patrat perfect, căci:

$$93636=306^2.$$

Rezultă că numărul de două cifre cerut, este 36.

Soluţii date de d-rele: *Naneş Cornelia* (studentă), *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Apostol Radu* (lic., Milit, N. Filipescu), *Boborodea Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Boiangiu Gh.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Buzincu Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Chiriac Simion* (lic. Huşi), *Damsker D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Dobrescu Paul* (lic. Milit, N. Filipescu), *Dobru Virgil* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Enăşescu D. Victor* (lic. Milit., Iaşi), *Florescu Gh. Haralambie*, *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Grigore M. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Hompola Tiberiu* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu). *Ionescu C. Stefan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Marnea Desideriu*

(lic. Beiuş), *Maşcas Petru* (Şc. Polit., Timişoara a), *Măgală Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Munteanu Lazăr* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pană Petre* (lic. Milit., N. Filipescu), *Petrescu Anastasie* (Craiova), *Pompeiu Marica*, *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Postelnicescu M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara) *Stoica N. D-tru*, *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Vişa Eugen* (Blaj).

PROBLEME PROPUSE

1401. — Să se găsească un număr de două cifre, astfel ca jumătatea lui să fie egală cu rădăcina patrată a răsturnatului său.

CEZAR IVANESCU

1402. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre însemnătoare şi diferite, astfel ca ultima cifră să fie egală cu suma cifrelor din mijloc, ştiind încă că dacă adăogăm numărului format de cifrele din mijloc prima cifră a numărului căutat, obţinem rădăcina sa patrată.

M. AMARASTEANU

1403. — A şi B fiind numere raţionale, să se stabilească identitatea:

$$\sqrt[3]{\frac{A}{2}+\sqrt{\frac{A^2}{4}-\left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{A^2}{4}-\left(\frac{\sqrt{B}}{3\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}}\right)^3}}=\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$$

G. G. CONSTANTINESCU

1404. — Să se găsească trei numere astfel ca suma lor să fie egală cu produsul lor, produsul celui dintâiu prin ultimul să fie egal cu suma dintre întâiul şi al doilea, iar produsul celui dintâiu prin al doilea să fie egal cu diferenţa dintre al treilea şi primul.

MIHAIL BOTEZ

1405. — Se dă un dreptunghiu $ABCD$. Perpendiculara în B pe DB întâlneşte pe DC în I. Se ia pe DA şi AB segmentele:

$$DM=AN=\frac{CI}{2}.$$

Să se demonstreze că triunghiul CMN este isoscel.

D. V. IONESCU

1406. — Se dă în plan un cerc O_1 şi un punct M exterior lui.

Se duc tangentele MA_1, MB_1 la O_1 şi se iau intersecţiile D_1, E_1 ale acestor tangente cu B_1O_1 şi A_1O_1.

Fie O_2 cercul circumscris trapezului $A_1B_1E_1D_1$. Se construesc faţă de cercul O_2 punctele A_2, B_2, E_2, D_2 analog cu A_1, B_1, E_1, D_1 faţă de O_1. Se construeşte cercul O_3 circumscris trapezului $A_2B_2D_2E_2$ şi se obţin prin construcţii analoage punctele A_3, B_3, D_3, E_3 şi aşa mai departe. Să se demonstreze că:

Puncte A_i, B_i sunt pe două drepte simetrice faţă de MO_1 şi punctete D_i, E_i sunt pe alte două drepte simetrice faţă de MO_1.

G-L GH. BUICLIU

1407. — Să se stabilească identitatea:

$$\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\sin x-\cos\frac{k\pi}{2p}\right)=(-1)^{p+1}\operatorname{tg}x\prod_{k=1}^{2p-1}\left(\cos x-\cos\frac{k\pi}{2p}\right).$$

V. ALACI

1408. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:

$$\sum\frac{a r_a^2}{r_a-r}=p(4R+r).$$

EMILIAN MEREUTA

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

PUBLICAŢIUNILE INSTITUTULUI MATEMATIC ROMAN

Director: prof. dr. Rodolphe RACLIŞ, Aleea Vulpache 21, Bucureşti 3, Telefon 22.444

AU APĂRUT PENTRU ANUL ŞCOLAR 1934—1935:

1° GEOMETRIE ANALITICĂ de *G. Ţiţeica*, ediţia 4-a, inclusiv chestiuni de examen, rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

2° ALGEBRĂ SUPERIOARĂ de *A. Angelescu*, ediţia 3-a, inclusiv probleme de Seminar, chestiuni de examen, rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

3° MATEMATICI ELEMENTARE şi GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *D. Barbilian*, ediţia 3-a, partea întâia, Algebră . . . . . 70 lei

4° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, cuprinde Dreapta, Planul, Conice, Cuadrice, cu exerciţii, probleme de seminar, şi chestiuni de examen; pentru studenţii dln Anul I, secţiile Matematică şi Fizico-chimice şi elevii din Anul preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

5° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *D. Pompeiu*, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . 50 lei

6° MECANICĂ, partea I, de *A. G. Ioachimescu*, ediţia 2-a, cu probleme, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 90 lei

7° CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, pentru elevii clasei VII secundară secţia ştiinţifică pentru elevii Liceelor Militare, pentru studenţii Anului I, secţiile Matematică. Electrotechnică şi Chimie Industrială, pentru elevii Anului Preparator de la Şcoalele Politechnice şi Academia de Arhitectură.

8. ELEMENTE DE CALCUL DIFERENŢIAL ŞI CALCUL INTEGRAL de *R. Racliş*, ediţia 2-a, cu exerciţii şi probleme de Seminar; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică, şi elevii din Anul I, Şcoalele Politechnice.

9° ANALIZA INFINITEZIMALĂ de *A. Davidoglu*, ediţia 4-a, cu exerciţii, probleme de seminar şi chestiuni de examen; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică . . . . . 240 lei

10° MECANICA RAŢIONALĂ, partea II, de *A. G. Ioachimescu*, cu chestiuni de examen, rezolvate; pentru elevii din anul I, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

11° REVISTA UNIVERSITARA MATEMATICA, journal rédigé par *Rodolphe Raclis*, pour les candidats à la Licence et les élèves des Grandes Ecoles, in 8° de VIII+256 pages; cuprinde chestiuni de examen rezolvate şi articole, note sau probleme semnate Tr. Lalescu, E. Picard, V. Volterra, G. Julia, G. Ţiţeica, D. Pompeiu, I. Ionescu, V. Vâlcovici, R. Racliş, H. Villat, D. Barbilian, N. Coculescu, E. Cahen, D. Emanuel, G. Filipescu, A. Ioachimescu, G. Nichifor, Sc. Panaitescu, C. Popovici, S. Sanielevici, G. Sudan, L. Teodoriu, V. Claudian Coşniţă, N. Botea, Ş. Ţiţeica, N. Teodorescu, I. Georgescu Racoviţă, C. Ionescu Bujor, G. Simionescu, T. Popoviciu, Caius Iacob, C. Drâmbă, G. Tailer, Tr. Lişcu, R. Woinarosky, etc. . . . . 140 lei

12° LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE par *Trajan Lalesco*, (pour paraître prochainement).

13° INTRODUCTION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES par *Trajan Lalesco*, 2-e édition (pour paraître prochainement).

14° SOLUTION PRINCIPALE DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES DE POINCARÉ par *Rodolphe Racliş*, édition des Presses Universitaires de France, Paris . . . . . 190 lei

15° ANNALES ROUMAINES DE MATHÉMATIQUES, journal publié par *Rodolphe Racliş* (pour paraître prochainement).

Publicaţiile Institutului Matematic Român se găsesc de vânzare la Librăria „Cartea Românească" Bulevardul Academiei 3, Bucureşti 1.

ANUL XV. 15 AUGUST 1935 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. IOAN V. MĂTIEȘ: SEPARAREA NUMERELOR DUPA ULTIMUL GRUP AL PATRATELOR, CUBURILOR SI BI-PATRATELOR LOR
2. I. V. MĂTIEȘ: ASUPRA UNOR PROBLEME DE EXAMEN
3. NOTE MATEMATICE: 11.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1259, 1284, 1285, 1286, 1287, 1318, 1321.
6. PROBLEME PROPUSE: 1349-1350.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — NO. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SEPARAREA NUMERELOR DUPĂ ULTIMUL GRUP AL PATRATELOR, CUBURILOR ȘI BIPATRATELOR LOR.

De ION V. MĂTIEȘ

Examinând tabelele de patrate, cuburi sau bipatrate, observăm că ultimul grup de o cifră, de două sau de mai multe cifre, se repetă după o anumită regulă. In cele ce urmează le-vom studia pe fiecare.

I. Unitățile patratelor perfecte se repetă din zece în zece și sunt simetric aranjate față de 5. Deci este suficient a studia terminațiunea patratelor primilor cinci numere pentru a putea da formele generale ale numerelor ce au la unitățile patratelor lor o anumită cifră dată. Rezultatele sunt date în tabelul ce urmează:

u	N	u	N
0	$10n$	5	$10n+5$
1	$10n \pm 1$	6	$10n \pm 4$
4	$10n \pm 2$	9	$10n \pm 3$

No. 1.

Grupul format de unități și zeci adică zu se repetă din 50 în 50 și e simetric aranjat față de 25. E suficient dar a studia grupul zu la primele 25 patrate perfecte și a da formele generale ale numerelor ale căror patrate se termină cu un anumit grup de două cifre. Rezultatul e dat în următorul tablou:

zu	N	zu	N
00	$10n$	44	$50n \pm 12$
01	$50n \pm 1$	49	$50n \pm 7$
04	$50n \pm 2$	56	$50n \pm 16$
09	$50n \pm 3$	61	$50n \pm 19$
16	$50n \pm 4$	64	$50n \pm 8$
21	$50n \pm 11$	69	$50n \pm 13$
24	$50n \pm 18$	76	$50n \pm 24$
25	$10n \pm 5$	81	$50n \pm 9$
29	$50n \pm 23$	84	$50n \pm 22$
36	$50n \pm 6$	89	$50n \pm 17$
41	$50n \pm 21$	96	$50n \pm 14$

No. 2.

In mod analog se pot separa numerele după ultimele trei cifre ale patratelor lor, întrucât grupul szu se repetă din 500 în 500 și este simetric așezat față de 250.

II. Unitățile cuburilor se repet din 10 în 10. In tabloul ce urmează se arată de ce formă sunt numerele ale căror cuburi au la unități o anumită cifră u.

u	N	u	N
0	$10n$	5	$10n+5$
1	$10n+1$	6	$10n+6$
2	$10n+8$	7	$10n+3$
3	$10n+7$	8	$10n+2$
4	$10n+4$	9	$10n+9$

No. 3.

Grupul de două cifre (zu) cu care se pot termina cuburile perfecte se repetă, în șirul consecutiv al cuburilor perfecte, din 100 în 100. Vom da în tabloul ce urmează forma generală a numerelor (N) ale căror cuburi se termină cu un grup de de două cifre date (zu).

zu	N	zu	N	zu	N
00	$10n$	32	$50n + 18$	68	$50n + 32$
01	$100n + 1$	33	$100n + 77$	69	$100n + 89$
03	$100n + 87$	36	$50n + 46$	71	$100n + 91$
04	$50n + 34$	37	$100n + 33$	72	$50n + 38$
07	$100n + 43$	39	$100n + 79$	73	$100n + 97$
08	$50n + 2$	41	$100n + 81$	75	$20n + 15$
09	$100n + 69$	43	$100n + 7$	76	$50n + 26$
11	$100n + 71$	44	$50n + 14$	77	$100n + 53$
12	$50n + 8$	47	$100n + 63$	79	$100n + 59$
13	$100n + 17$	48	$50n + 22$	81	$100n + 61$
16	$50n + 6$	49	$100n + 49$	83	$100n + 27$
17	$100n + 73$	51	$100n + 51$	84	$50n + 44$
19	$100n + 39$	52	$50n + 28$	87	$100n + 83$
21	$100n + 41$	53	$100n + 37$	88	$50n + 42$
23	$100n + 47$	56	$50n + 36$	89	$100n + 29$
24	$50n + 24$	57	$100n + 93$	91	$100n + 31$
25	$20n + 5$	59	$100n + 19$	92	$50n + 48$
27	$100n + 3$	61	$100n + 21$	93	$100n + 57$
28	$50n + 12$	63	$100n + 67$	96	$50n + 16$
29	$100n + 9$	64	$50n + 4$	97	$100n + 13$
31	$100n + 11$	67	$100n + 23$	99	$100n + 99$

No. 4.

In mod analog se pot separa numerele după ultimele trei cifre (szu) cu care se termină cuburile lor, întrucât grupul szu în şirul consecutiv al cuburilor perfecte se repetă din 1000 în 1000.

III. Bipatratele se termină cu una din cifrele 0, 1, 5, 6. Dacă examinăm un tabel cu bipatrate, observăm că în şirul consecutiv al bipatratelor, unităţile se repetă din 10 în 10 şi sunt simetric aranjate faţă de 5. In tabelul ce urmează se arată de ce formă sunt numerele (N) ale căror bipatrate se termină cu o anumită cifră (u).

u	N	u	N
0	$10n$	5	$10n + 5$
1	$10n \pm (2 \pm 1)$	6	$10n \pm (3 \pm 1)$

No. 5.

Grupul (zu) format de zeci şi unităţi, în care se termină bipatratele se repetă din 50 în 50 şi este simetric aşezat faţă de 25. E suficient a examina dintr'un tabel de bipatrate numai până la 25 şi uşor putem da forma generală a numerelor ce au la bipatratele lor un anumit grup de două cifre de unităţi şi zeci (zu). Rezultatele le dăm în tabloul ce urmează:

zu	N	zu	N
00	$10n$	41	$50n \pm (17 \pm 6)$
01	$50n \pm (4 \pm 3)$	56	$50n \pm (13 \pm 9)$
16	$50n \pm (8 \pm 6)$	61	$50n \pm (11 \pm 2)$
21	$50n \pm (18 \pm 1)$	76	$50n \pm (21 \pm 3)$
25	$10n + 5$	81	$50n \pm (12 \pm 9)$
36	$50n \pm (14 \pm 2)$	96	$50n \pm (7 \pm 1)$

No. 6.

Examinând tabloul de bipatrate a numerelor până la 250, se pot separa numerele după ultimul grup (szu) a bipatratelor, format de sute zeci şi unităţi, întrucât grupul szu se repetă din 500 în 500 şi e simetrie faţă 250 în şirul consecutiv al bipatratelor.

Rezultatele din tablourile No. 1, . . . , 6 pot înlesni unele cercetări de patrate, cuburi şi bipatrate perfecte.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE EXAMEN.

Redactate de I. V. MĂTIEŞ.

Elevii şcoalelor secundare (liceu, normală, comerţ) din *Blaj* ţin sedinţe, sub conducerea profesorilor de matematici, în cari se tratează chestiuni de matematici şi în special se rezolvă diferite probleme ce s'au dat la examene de admitere la şcoli Politechnice, Militare etc.

Cred folositor, pentru cetitorii acestei reviste şi în special pentru candidaţii ce se supun la aceste examene, soluţionarea unor probleme de geometrie, dată în cadrul unei sedinţe, la cari au luat parte şi cuvânt mai mulţi profesori.

Las să urmeze soluţiile date la două probleme.

1. D-l *N. Ţarina.* — Imi propun să rezolv o problemă de geometrie (ce s'a dat la examenul de admitere în Şcoala Militară Aeronautică, Secţia Navigauţi, August 1928), cu următorul enunţ:

Se consideră triunghiul isoscel A B C ($\overline{AB} = \overline{AC}$) *într'un cerc. Prin vârful* A *se duce o secantă, ce*

întâlneşte latura $\overline{BC}$ *în punctul* D, *iar cercul în punctul* E; *să se arate că avem:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AE}.$$

Dacă în teorema lui *Stewart*:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC}$$

înlocuesc pe $\overline{AC}$ cu $\overline{AB}$, obţin succesiv:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{DC} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{AB}^2 (\overline{DC} + \overline{BD}) - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

şi în baza teoremei secantelor:

$$\overline{BD} \cdot \overline{DC} = \overline{AD} \cdot \overline{DE},$$

obţin:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DE}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} (\overline{AD} + \overline{DE})$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AE},$$

relaţia de demonstrat.

D-l. *I. V. Mătieş.* Voiu face două observări:

a. Relaţia demonstrată există şi în cazul când D este în afara cercului, căci fie $\overline{BC} = 2c$, $FD' = x$, r, raza cercului, $FO = a$; uşor se poate calcula:

$$\overline{AD'} = \sqrt{(a+r)^2 + x^2} \quad \text{şi} \quad \overline{AE'} = \frac{(a+r)^2 + c^2}{\sqrt{(a+r)^2 + x^2}}$$

şi produsul:

$$\overline{AD'} \cdot \overline{AE'} = (a+r)^2 \; c^2$$

e independent de x.

Din triunghiul dreptunghiu AFB scot:

$$\overline{AB}^2 = (a+r)^2 + c^2$$

şi deci:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AD'} \cdot \overline{AE'} =$$

$$(a+r)^2 + c^2 = \text{const.}$$

b. Dacă unesc pe B cu E şi pe E cu C, problema se mai poate enunţa:

Dacă în patrulaterul inscriptibil ABEC *avem* $\overline{AB} = \overline{AC}$, D *fiind punctul de intersecţie al diagonalelor, atunci există relaţia:*

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AE}.$$

Aceasta este tocmai problema 1076, propusă în *Revista Matematică din Timişoara, Anul XI, Nr. 12* şi a cărei soluţie încă nu s'a dat[1]).

Mai observ, în acest caz, că dacă D ar fi exterior cercului, patrulaterul ABE'C e stelat.

2. D-l *N. Ţarina.* A doua problemă ce mi-am propus să o rezolv, este:

Se dă un trapez, la care baza mare $\overline{AD}$ *este de 45 m şi cea mică de 30 m. Prin intersecţia diagonalelor se duce o paralelă la baze.*

Se cere lungimea segmentului, cuprins între $\overline{AB}$ *şi* $\overline{CD}$.

(Chestiuni de examen, Şcolile Militare Navale 1928.)

Din triunghiurile, AEG asemenea cu ABC şi EBG asemenea cu ABD se obţine:

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} \quad \text{şi} \quad \frac{\overline{EG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}}.$$

şi adunându-le, găsesc:

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{EG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE} + \overline{EB}}{\overline{AB}} = 1$$

$$\overline{EG} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} + \overline{BC}}.$$

La fel, din triunghiurile, DGF asemenea cu DBC şi GCF asemenea cu ACD, se găseşte:

$$\overline{GF} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} + \overline{BC}};$$

de unde se deduce că:

$$\overline{EG} = \overline{GF}$$

precum şi:

$$\overline{EF} = \frac{2\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AD} + \overline{BC}}.$$

---

[1]) *Nota Redacţiei.* La data primirei acestui articol la „R. M. T." problema 1076 nu era rezolvată, dar ea se găseşte rezolvată acum în an. XIII, pag. 70.

In cazul numeric $\overline{AB} = 45$ m şi $\overline{CD} = 30$ m, găsesc $\overline{EF} = 36$ m.

D-l *O. Modorcea.* Segmentul $\overline{EF}$ determină pe înălţimea II' două segmente $\overline{IG}$ şi $\overline{GI'}$ proporţionale cu bazele trapezului, căci din perechile de triunghiuri IGC asemenea cu AGI' şi IBG asemenea cu $I'GD$, scot:

$$\frac{\overline{IG}}{\overline{GI'}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{AI'}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{I'D}} \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \frac{\overline{IG}}{\overline{GI'}} = \frac{\overline{CI}+\overline{IB}}{\overline{AI'}+\overline{I'D}}$$

$$\frac{\overline{IG}}{\overline{GI'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}.$$

Pentru căutarea lungimei $\overline{EF}$, voiu calcula pe $\overline{EH}$ şi pe $\overline{LF}$. Din asemănarea triunghiului EBH cu ABB' scot:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{B'H}+\overline{HB}}{\overline{BH}}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \frac{\overline{AB'}}{\overline{EH}} = 1 + \frac{\overline{B'H}}{\overline{BH}}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \frac{\overline{AB'}}{\overline{EH}} = 1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \overline{EH} = \overline{AB'}\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}+\overline{AD}},$$

iar din asemănarea triunghiului LCF cu $C'CD$, scot în mod analog:

$$\overline{LF} = \overline{C'D}\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}+\overline{AD}}.$$

Adun pe:

$$\overline{EH}+\overline{HL}+\overline{LF} = \overline{AB'}\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}+\overline{AD}} +$$

$$\overline{BC}+\overline{CD'}\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}+\overline{AD}}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BC}+\overline{AD}}[\overline{AB'}+\overline{BC}+\overline{AD}+\overline{CD'}]$$

şi găsesc în fine:

$$\overline{EF} = \frac{2\,BC \cdot AD}{\overline{BC}+\overline{AD}}$$

lungimea căutată.

D-l *I. V. Mătieş.* Fie două numere a şi b $(a \leqq b)$ şi M media lor armonică, M_i, media armonică a numerelor M_{i-1} şi $b\,(i = 1, 2, 3, \ldots)$, iar M_i' media armonică a numerelor a şi M_{i-1}' $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Imi propun să arăt că există relaţia:

$$M = \frac{M_i M_i'}{M_i + M_i'}$$

şi să-i dau o înterpretare geometrică.

Voiu calcula mai întâi pe M_i şi M_i' în funcţie de a şi b. Se ştie că media armonică a numerelor a şi b este:

$$M = \frac{2ab}{a+b},$$

iar media armonică a numerelor a şi M este:

$$M_1' = \frac{2a \cdot M}{a+M} \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad M_1' = \frac{2a\dfrac{2ab}{a+b}}{a+\dfrac{2ab}{a+b}}.$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad M_1' = 2^i\frac{2ab}{a+3b}.$$

In mod analog se găseşte, din aproape în aproape, că media armonică a numerelor a şi M_{i+1}' este:

$$M_i' = 2^i\frac{2ab}{a+(2^{i+1}-1)b},$$

iar media armonică a numerelor M_{i-1} si b este:

$$M_i = 2^i\frac{2ab}{(2^{i+1}-1)a+b}.$$

Spre a demonstra relaţia:

$$M = \frac{2M_i M_i'}{M_i + M_i'},$$

înlocuiesc pe M_i şi M_i' şi obţin în mod succesiv:

$$M = 2\frac{\dfrac{2^{i+1}ab}{(2^{i+1}-1)a+b} \cdot \dfrac{2^{i+1}ab}{a+(2^{i+1}-1)b}}{\dfrac{2^{i+1}ab}{(2^{i+1}-1)a+b} + \dfrac{2^{i+1}ab}{a+(2^{i+1}-1)b}}.$$

$$M = 2\,\frac{\dfrac{1}{(2^{i+1}-1)\,a\,b}\cdot\dfrac{2^{i+1}\,a\,b}{a+(2^{i+1}-1)\,b}}{\dfrac{1}{(2^{i+1}-1)\,a+b}+\dfrac{1}{a+(2^{i+1}-1)\,b}}$$

$$M = 2\,\frac{2^{i+1}\,a\,b}{a+(2^{i+1}-1)\,b+(2^{i+1}-1)\,a+b}$$

$$M = 2\,\frac{2^{i+1}\,a\,b}{2^{i+1}\,a+a-a+2^{i+1}\,b+b-b}$$

$$M = \frac{2\,a\,b}{a+b}.$$

şi relaţia e demonstrată.

Interpretarea geometrică. Dacă a şi b sunt respectiv baza mică şi mare a unui trapez, atunci M este chiar segmentul $\overline{E\,F}$ calculat de D-l *N. Ţarina* şi *O. Modorcea.* Interpretarea celorlalte medii este evidentă: M_i este segmentul dus paralel bazelor, prin intersecţia diagonalelor unui trapez cu bazele respective M_{i-1} şi b. M_i' se interpretează analog ca M_i'. Relaţia:

$$M = \frac{2\,M_i\,M_i'}{M_i+M_i'},$$

înseamnă că M este comun tuturor trapezelor cari au respectiv ca baze M_i şi M_i' $(i = 1, 2, \ldots)$, ceeace mai înseamnă că diagonalele acestor trapeze concurează toate în punctul G (dar pentru unul şi acelaş trapez A B C D).

Se mai observă că relaţia:

$$M = \frac{2\,a\,b}{a+b}$$

este independentă de înălţimea trapezului şi de unghiul format de laturile neparalele şi depind numai de mărimea bazelor.

In concluzie, se vede că tratând unele chestiuni, în decursul unei şedinţe, se pot găsi proprietăţi şi generalizări interesante.

Blaj, la 28. II. 1933.

NOTE MATEMATICE

11. — *Sur une expression de la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit à un triangle.*

1. *G. de Longchamps* a montré que le centre du cercle orthogonal à trois cercles, décrits des sommets A, B, C d'un triangle comme centres avec les longeurs $a = B\,C$, $b = C\,A$, $c = A\,B$ des côtés opposés pour rayons, coïncide avec le symétrique Ω de l'orthocentre H par rapport au centre O du cercle, de rayon R, circonscrit au triangle. [1]

Si l'on pose $O\,\Omega = d = -\,O\,H$, S étant l'aire du triangle A B C, la formule que nous avons donnée, (R. M. T., XII, p. 76), donne:

$$(1) \qquad \Sigma\, a^2\,(a^2-b^2)\,(a^2-c^2) = 16\,d^2\,S^2;$$

d'où cette expression du carré de la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit au triangle:

$$(2) \qquad \overline{O\,H}^2 = \frac{1}{16\,S^2}\cdot\Sigma\, a^2\,(a^2-b^2)\,(a^2-c^2).$$

2. Si nous prenons sur B A et C A, A B et C B A C et B C, les longueurs $B\,M_a = C\,N_a = B\,C$ $A\,M_b = C\,N_b = A\,C$, $A\,M_c = B\,N_c = B\,A$, puis, sur les prolongements des mêmes côtés, les longueurs $B\,M_a' = C\,N_a' = B\,C$, $A\,M_b' = C\,N_b' = A\,C$, $A\,M_c' = B\,N_c' = B\,A$, et que l'on désigne par S_a et S_a', S_b et S_b', S_c et S_c' les aires algébriques des triangles $M_a\,A\,N_a$ et $M_a'\,A\,N_a'$, ..., $M_c\,C\,N_c$ et $M_c'\,C\,N_c'$, on a:

$$(3) \quad S_a = \frac{1}{2}\,A\,M_a\,.\,A\,N_a\sin A = \frac{a}{4\,R}\cdot(a-b)\,(a-c),$$

$$S_a' = \frac{a}{4\,R}\cdot(a+b)\,(a+c)$$

et des valeurs analogues pour S_b et S_b', S_c et S_c' obtenues par permutations circulaires des longueurs a, b, c.

Dès lors, la relation (2) devient la suivante:

$$(4) \qquad \overline{O\,H}^2 = \frac{R^2}{S^2}\cdot(S_a\,S_a' + S_b\,S_b' + S_c\,S_c'),$$

[1]) *Journal de Mathématiques spéciales,* 1886 58.

ou bien:

$$\frac{S^2}{R^2}\cdot\overline{OH}^2=(S_a S'_a+S_b S'_b+S_c S'_c).$$

l'expression $(S_a S'_a+S_b S'_b+S_c S'_c)^{\frac{1}{2}}$ *est donc moyenne proportionnelle entre la distance* O H *de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit au triangle fondamental et le demi-périmètre* $\frac{S}{R}$ *de son triangle orthique.*

Cas particulier. Lorsque le triangle A B C est *rectangle* en A, O H = R, et:

$$S^2=S_a S'_a+S_b S'_b+S_c S'_c.$$

V. THÉBAULT

BIBLIOGRAFIE

1. *Boletin Matematico*, anul VIII, No. 3, Maiu 1935, Buenos Aires. Calculul unor integrale definite, de *G. G. Constantinescu*. Notă asupra omotetiei şi inversiunei, de *B. I. Baidaff.*

2. *José González Galé.* Matematicas Financieras Este o carte didactică interesantă de 208 pagini, tipărită în condiţii irepoşabile. Tratează elementar chestiuni ce privesc: *Dobânda simplă* şi *compusă*, *scont*, *amortizări*, *rente*, *anuităţi variabile*, *emisiuni de obligaţiuni* şi se termină cu un apendice ce tratează pe scurt despre *probabilităţi*. Sunt numeroase aplicaţiuni numerice interesante:

PROBLEME REZOLVATE

1259. — *Să se demonstreze că dacă două din cantităţile* α_1, α_2, α_3 *sunt imaginare conjugate, atunci expresiunea:*

$$\frac{1}{\alpha_1^4(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)}+\frac{1}{\alpha_2^4(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)}+\frac{1}{\alpha_3^4(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)},$$

este reală.

V. ALACI

Prima soluţie. Expresiunea dată fiind simetrică în raport cu α_1, α_2, α_3 putem presupune că α_1 şi α_2 de exemplu sunt imaginare conjugate, α_3 fiind real.

Fie deci:

$$(1)\qquad \begin{matrix}\alpha_1=a+bi\\ \alpha_2=a-bi\end{matrix}\quad (a \text{ şi } b \text{ reali, } i=\sqrt{-1}),$$

atunci:

$$(2)\qquad \alpha_1^4=A+Bi,\qquad \alpha_2^4=A-Bi$$

unde A şi B sunt reali şi se pot calcule precis, dar nu avem nevoie.

Expresiunea dată, pe care s'o notăm cu E, se poate scri încă:

$$(3)\qquad E=\frac{\alpha_2^4\alpha_3^4(\alpha_2-\alpha_3)+\alpha_1^4\alpha_3^4(\alpha_3-\alpha_1)+\alpha_1^4\alpha_2^4(\alpha_1-\alpha_2)}{\alpha_1^4\alpha_2^4\alpha_3^4(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_3)}.$$

Ţinând seamă de (1) şi (2) şi observând că avem:

$$\alpha_1^4\alpha_2^4=A^2+B^2,\qquad \alpha_1-\alpha_2=2bi,$$

expresiunea (3) devine:

$$(4)\qquad E=\frac{(A-Bi)\alpha_3^4(a-bi-\alpha_3)+(A+Bi)\alpha_3^4(\alpha_3-a-bi)+2b(A^2+B^2)i}{(A^2+B^2)\alpha_3^4 2bi(a-bi-\alpha_3)(a+bi-\alpha_3)}.$$

Notând încă pentru prescurtare:

$$a-\alpha_3=C,\qquad (C, \text{ real}),$$

expresiunea (4) devine:

$$(5)\qquad E=\frac{(A-Bi)\alpha_3^4(C-bi)-(A+Bi)\alpha_3^4(C+bi)+2b(A^2+B^2)i}{\alpha_3^4(A^2+B^2)2bi(C-bi)(C+bi)}=\frac{M}{N}.$$

Calculând numărătorul şi numitorul, putem scri evident:

$$M = \alpha_3^4 [A C - b B - (b A + B C) i - A C + b B - (b A + B C) i] + 2 b (A^2 + B^2) i$$
$$= [-2 \alpha_3^4 (b A + B C) + 2 b (A^2 + B^2)] i$$
$$N = 2 b \alpha_3^4 (A^2 + B^2)(C^2 + b^2) i.$$

Inlocuind aceste valori în expresiunea (5) şi simplificând cu $2i$, avem:

$$E = \frac{b(A^2 + B^2) - \alpha_3^4 (A b + B c)}{b \alpha_3^4 (A^2 + B^2)(b^2 + C^2)},$$

unde toate cătimele sunt reale, deci E este real.

Soluţie analoagă dată de d-l *Cazanacli V. Petre* (Chişinău).

Soluţia 2-a. In „R. M. T." anul XIII, No. 11, pag. 123 este stabilită următoarea propoziţiune:

„Se dă ecuaţia:

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 = 0,$$

cu rădăcinele α_1, α_2, α_3, *atunci între rădăcinele şi coeficienţii acestei ecuaţii există relaţiunea:*

$$(2) \qquad E = \frac{1}{a_0^4} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & a_2 & a_1 \end{vmatrix},$$

unde E înseamnă pentru prescurtare, expresiunea din enunţ.

Acum dacă α_1, α_2 sunt imaginare conjugate şi α_3 este real, putem arătă că coeficienţii a_0, a_1, a_2 sunt reali şi deci va rezulta că E este real. In adevăr, relaţiile cunoscute între rădăcinele şi coeficienţii unei ecuaţii, ne permit a scri privind ecuaţia (1):

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = a_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_0 \end{cases}$$

Cum prin ipoteză α_3 este real şi:

$$\alpha_1 = a + b i, \quad \alpha_2 = a - b i \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

unde a şi b sunt reali, rezultă că relaţiile (3) devin respectiv:

$$\begin{cases} 2a + \alpha_3 = -a_2 \\ a^2 + b^2 + 2 a \alpha_3 = a_1 \\ (a^2 + b^2) \alpha_3 = -a_0 \end{cases}$$

Primii membrii ai acestor relaţii sunt reali, rezultă dar că şi coeficienţii a_0, a_1, a_2 sunt reali, deci membrul al 2-lea din (2) este real, de unde urmează că şi primul membru din (2) adică relaţiunea din enunţ, este reală.

Soluţii date de d-nii: *Amărică Tibul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Apostol Gh. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Căsoanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cehan Gh. Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac C-tin* (Şc. Of. de Artilerie), *Haret I. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Marteş Grigore* (lic. Milit., Chişinău), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Trăsnitu Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Vasilescu Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasiliu Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca S.* (lic. Milit., Cernăuţi).

Observare. Multe din soluţiile primite au aproape aceiaşi redactare şi pe viitor nu vom mai inregistra astfel de soluţii:

1284. — *Să se determine m astfel ca rădăcinele ecuaţiei:*

$$2 x^2 + 2 m x + 2 m - 1 = 0,$$

să aibă acelaş modul, iar argumentele lor să difere prin $\frac{\pi}{2}$.

I. V. MATIES

Fie:

$$x_1 = \varrho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad x_2 = \varrho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

rădăcinile ecuaţie date.

Conform enunţului trebuie să avem:

$$\varrho_2 = \varrho_1, \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2};$$

deci:

$$\cos \theta_2 = -\sin \theta_1, \sin \theta_2 = \cos \theta_1.$$

Prin urmare:

$$x_1 = \varrho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$
$$x_2 = \varrho_1 (-\sin \theta_1 + i \cos \theta_1) = \varrho_1 (i^2 \sin \theta_1 + i \cos \theta_1)$$
$$= i \varrho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = i x_1.$$

Aşa dar ecuaţia dată, are rădăcinele:

$$x_1 \quad \text{şi} \quad i x_1 .$$

Scriind suma şi produsul lor în funcţie de coeficienţi, avem:

$$\begin{cases} x_1 + i x_1 = -m \\ i x_1^2 = m - \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Mai putem scri:

$$\begin{cases} (1+i)^2 x_1^2 = m^2 \\ i x_1^2 = m - \frac{1}{2} . \end{cases}$$

Impărţind aceste două relaţii, obţinem:

$$\frac{m^2}{m - \frac{1}{2}} = \frac{(1+i)^2}{i} = \frac{1 + 2i - 1}{i} = 2,$$

sau:

$$m^2 - 2m + 1 = 0 ,$$

care se poate scri;

$$(m-1)^2 = 0 ,$$

deci:

$$m = 1 .$$

Rezultă dar că numai pentru $m = 1$, condiţia din enunţ este satisfăcută.

Verificare. Pentru $m = 1$, ecuaţia dată devine:

$$2x^2 + 2x + 1 = 0 ,$$

cu rădăcinele:

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right)\right],$$

ceea-ce învederează că rădăcinile au acelaşi modul, iar argumentele diferă cu $\frac{\pi}{2}$.

Soluţii date de d-nii: *Apostol Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Burghelea V. Stelian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cătuneanu M. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cozanacli V. Petre* (Chişinău), *Cehan Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cosma V. Bediceanu* (lic Milit., Cernăuţi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Săvulescu Spirea* (Şc. Polit, Bucureşti).

1285. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} xy(x+y-z) = 6 \\ yz(y+z-x) = 60 \\ zx(x+z-y) = 24 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Inmulţind ecuaţiile sistemului dat respectiv cu z, x, y şi notând:

$$(1) \qquad xyz = t,$$

obţinem:

$$(2) \qquad \begin{cases} tx + ty - (t+6)z = 0 \\ -(t+60)x + ty + tz = 0 \\ tx - (t+24)y + tz = 0 \end{cases}$$

Avem un sistem omogen în x, y, z şi pentru a obţine pentru x, y, z valori nu toate nule, trebuie cum ştim, ca determinantul sistemului să fie nul, adică:

$$\begin{vmatrix} t & t & -(t+6) \\ -(t+60) & t & t \\ t & -(t+24) & t \end{vmatrix} = 0 .$$

Dezvoltând acest determinant după regula lui *Sarrus*, avem:

$$t^3 - (t+60)(t+24)(t+6) + t^3 + t^2(t+6) +$$
$$t^2(t+24) + t^2(t+60) = 0,$$

sau efectuând calculele şi simplificând prin 4, obţinem:

$$(3) \qquad t^3 - 486t - 2160 = 0.$$

Căutând care din factorii lui 2160 satisfac ecuaţia (3), găsim $t = 24$, astfel că ecuaţia (3) se poate scri:

$$(t-24)(t^2 + 24t + 90) = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuații sunt:

$$(4) \qquad t_1 = 24, \qquad t_{2,3} = -12 \pm 3\sqrt{6}.$$

Pentru aceste valori puse în locul lui t, sistemul (2) devine după simplificare:

$$(5) \quad \begin{cases} 4x + 4y - 5z = 0 \\ -7x + 2y + 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} (-4 \pm \sqrt{6})x + (-4 \pm \sqrt{6})y - (-2 \pm \sqrt{6})z = 0 \\ -(16 \pm \sqrt{6})x + (-4 \pm \sqrt{6})y + (-4 \pm \sqrt{6})z = 0 \\ (-4 \pm \sqrt{6})x - (4 \pm \sqrt{6})y + (-4 \pm \sqrt{6})z = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemele omogene (5) și (6) obținem respectiv:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} -4 \pm \sqrt{6} & -4 \pm \sqrt{6} \\ -(4 \pm \sqrt{6}) & -4 \pm \sqrt{6} \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{y}{\begin{vmatrix} -(16 \pm \sqrt{6}) & -4 \pm \sqrt{6} \\ -4 \pm \sqrt{6}) & -4 \pm \sqrt{6} \end{vmatrix}} =$$

$$\frac{z}{\begin{vmatrix} -(16 \pm \sqrt{6}) & -4 \pm \sqrt{6} \\ -4 \pm \sqrt{6} & -(4 \pm \sqrt{6}) \end{vmatrix}}$$

sau:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{9} = \frac{z}{12}$$

și:

$$\frac{x}{12 \mp 8\sqrt{6}} = \frac{y}{-36 \pm 4\sqrt{6}} = \frac{z}{48 \pm 28\sqrt{6}}.$$

Aceste relații se mai pot scri:

$$(7) \qquad \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k.$$

$$(8) \qquad \frac{x}{3 \mp 2\sqrt{6}} = \frac{y}{-9 \pm \sqrt{6}} = \frac{z}{12 \pm 7\sqrt{6}} = l.$$

Din (7) și (8) deducem:

$$(9) \quad \begin{cases} x = 2k \\ y = 3k \\ z = 4k \end{cases} \qquad (10) \quad \begin{cases} x = (3 \mp 2\sqrt{6})l \\ y = (-9 \pm \sqrt{6})l \\ z = (12 \pm 7\sqrt{6})l \end{cases}$$

Inlocuind în (1) aceste valori, precum și valorile corespunzătoare a lui t din (4), obținem:

$$2 \times 3 \times 4 . k^3 = 24,$$

$$(3 \mp 2\sqrt{6})(-9 \pm \sqrt{6})(12 \pm 7\sqrt{6})\, l^3 = -12 \pm 3\sqrt{6}.$$

Rezolvind aceste ecuații avem:

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_{2,3} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \alpha_{1,2} \end{cases}$$

$$l_1 = \sqrt[3]{\frac{-12 \pm 3\sqrt{6}}{(3 \mp 2\sqrt{6})(-9 \pm \sqrt{6})(12 \pm 7\sqrt{6})}} = m_{1,2}$$

$$l_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} m_{1,2}$$

Introducând aceste valori în (9) și (10), avem pentru sistemul dat următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\alpha_{1,2} \\ y = 3\alpha_{1,2} \\ z = 4\alpha_{1,2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = (3 \mp 2\sqrt{6})m_{1,2} \\ y = (-9 \pm \sqrt{6})m_{1,2} \\ z = (12 \pm 7\sqrt{6})m_{1,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (3 \mp 2\sqrt{6})\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} m_{1,2} \\ y = (-9 \pm \sqrt{6})\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} m_{1,2} \\ z = (12 \pm 7\sqrt{6})\dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} m_{1,2} \end{cases}$$

O soluție foarte bună, în felul celei date s'a primit de la d-l *Cazanacli V. Petre* (Chișinău).

Alte soluții date de d-nii: *Amărică Tibul* (lic. Milit, Chișinău), *Apostol Gh. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuți), *Căsoanu Carol* (lic. Milit., Cernăuți), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Popescu Greaca* (lic. Milit., Cernăuți) și *Săvulescu Spirea* (Șc. Polit., București).

1286. — *Să se rezolve ecuaţiile:*

$$\sin 2x \cos^3 x + \cos 2x \sin^3 x = \sin x \cos^2 x$$

$$\sin 2x \sin^3 x + \cos 2x \cos^3 x - \cos x \sin^2 x .$$

VIRGIL CLAUDIAN

Folosim în cele ce urmează, relaţiile cunoscute:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x ,$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x .$$

1°. Prima ecuaţie se mai poate scri:

$$2 \sin x \cos^4 x + \cos 2x \sin^3 x - \sin x \cos^2 x = 0 ,$$

sau:

$$\sin x (2 \cos^4 x + \cos 2x \sin^2 x - \cos^2 x) = 0 .$$

Mai putem scri:

$$\sin x [\cos^2 x (2 \cos^2 x - 1) + \cos 2x \sin^2 x] = 0 ,$$

sau:

$$\sin x (\cos^2 x \cos 2x + \cos^2 x \sin^2 x) = 0 .$$

$$\sin x \cos 2x = 0 .$$

Această ecuaţie este echivalentă cu următoarele:

$$\sin x = 0 , \qquad \cos 2x = 0 ,$$

cu rădăcinele respectiv:

$$x = k\pi \quad \text{şi} \quad x = k_1 \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$(k , k_1 = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots) .$$

2°. A 2-a ecuaţie din enunţ se mai poate scri:

$$2 \cos x \sin^4 x + \cos 2x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = 0 ,$$

sau:

$$\cos x (2 \sin^4 x + \cos 2x \cos^2 x - \sin^2 x) = 0 .$$

$$\cos x [\cos 2x \cos^2 x - \sin^2 x (1 - 2 \sin^2 x)] = 0 .$$

Mai putem scri:

$$\cos x (\cos 2x \cos^2 x - \sin^2 x \cos^2 2x) = 0 ,$$

sau:

$$\cos x \cos^2 2x = 0 .$$

Această ecuaţie este echivalentă cu următoarele:

$$\cos x = 0 , \qquad \cos 2x = 0 ,$$

cu rădăcinele respectiv:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad x = k_1 \pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$(k , k_1 = 0 , \pm 1 , \pm 2 , \ldots) .$$

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Amăricăi Tibul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Andriescu-Cale Bogdan* (lic. Internat, Iaşi), *Burghelea V. Stelian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Căsoanu Carol* (lic. Milit, Cernăuţi), *Cătuneanu M. Vasile* (lic. Milit, Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Iaşi), *Cehan G. Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Chiu Trifu* (Şc. Polit., Timişoara), *Constantin I. Gh.* (Bucureşti), *Cosma V. Bediceanu* (lic. Milit., Cernăuţi). *Damsker D.* (lic. Naţional, Iaşi), *Dobrescu D. Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Enăşescu D. Victor* (lic. Milit, Iaşi), *Florescu Gh. Haralambie* (Gorj), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Haret I. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Iliescu B. D-tru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Isac C. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Lupescu Gh. Corneliu* (bacalaureat, Roman), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit Cernăuţi), *Mărgărint Gr. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Marnea D.* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Milea E. G.* (Sub-Lt), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Popescu Greaca Vlad* (lic. Milit., Cernăuţi), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Râmbu Adrian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Trăsnitu N.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasilescu C. Nicolae* (Tg-Jiu), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

1287. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, se cere să se stabilească relaţia:*

$$\frac{\sqrt{r^3 r_a r_b r_c}}{\prod \left(\sqrt{\frac{r r_a r_b}{r_c}} + \sqrt{\frac{r r_a r_c}{r_b}} \right)} = \frac{r}{4R} .$$

M. AMARASTEANU

In virtutea relaţiilor cunoscute într'un triunghiu:

$$s = \sqrt{r r_a r_b r_c} , \quad r_c = \frac{s}{p - c} ,$$

$$r_b = \frac{s}{p - b} , \quad a b c = 4 R s ,$$

primul membru al relaţiei cerute pe care să'l însemnăm cu E, devine succesiv:

$$E = \frac{r s}{\prod \left(\frac{s}{r_c} + \frac{s}{r_b} \right)} = \frac{r s}{\prod (p - c + p - b)} =$$

$$\frac{r s}{\prod a} = \frac{r s}{a b c} = \frac{r s}{4 R s} = \frac{r}{4R} .$$

Astfel relaţia cerută este stabilită.

Soluţii date d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Amărică Tibul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Apostol Gh. Valeriu* (lic. Milit, Cernăuţi), *Căsoanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cornescu Emil* (lic Milit, Cernăuţi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dumitrescu Florin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Florescu Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Haret I. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Iliescu B. D-tru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Kikea Prasnaglava* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mărgărint Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Marnea Desideriu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N* (lic. Beiuş), *Milea E. G.* (Sub-Lt), *Milu I. N.* (lic. Milit., Chişinău), *Murgu Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu Greaca* (lic. Milit., Cernăuţi), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Râmbu Adrian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Trăsnitu Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Vasilescu C. Nicolae* (Tg-Jiu), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit, Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

1318. — *Să se demonstreze că în orice triunghiu avem relaţia:*

$$\sum \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a + h_a \sin^2 A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c + a b c}$$

IOAN B. POPA

Insemnând cu E primul membru şi folosind formulele cunoscute:

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{p(p-a)}{b c}, \qquad h_a = \frac{2 s}{a},$$

$a = 2 R \sin A$, avem:

$$(1)\ E = \sum \frac{\frac{p(p-a)}{b c}}{a + \frac{2 s}{a} \cdot \frac{a^2}{4 R^2}} = \sum \frac{p(p-a)}{a b c \left(1 + \frac{s}{2 R^2}\right)}$$

$$= \frac{p}{a b c \left(r + \frac{s}{2 R^2}\right)} \cdot \sum (p-a) = \frac{p^2}{\frac{a b c s}{2 R^2} + a b c} \cdot$$

In virtutea relaţiei cunoscute:

$$a b c = 4 R s,$$

putem scri:

$$\frac{a b c s}{2 R^2} = \frac{a b c s}{2 \left(\frac{a b c}{4 s}\right)^2} = \frac{8 s^3}{a b c} =$$

$$\frac{2 s}{a} \cdot \frac{2 s}{b} \cdot \frac{2 s}{c} = h_a h_b h_c.$$

Apoi din relaţiile cunoscute:

$$s^2 = r r_a r_b r_c$$

$$s = p r,$$

deducem:

$$(3) \qquad p^2 = \frac{1}{r} \cdot r_a r_b r_c.$$

In virtutea relaţiilor (2) şi (3), relaţia (1) devine:

$$E = \frac{1}{r} \cdot \frac{r_a r_b r_c}{h_a h_b h_c + a b c},$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăsteanu M* (Craiova), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Deceanu Gh.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of de Artilerie), *Milea E. Gh.* (Sub-Lt), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu).

1321. — *Să se arate că expresiunea:*

$$E = 625^{2p+1} + 4 \times 125^{2p+1} + 150 \times 25^{2p} + 20 \times 5^{2p} + 1,$$

este divizibilă prin 1296, p fiind întreg şi pozitiv:

ION MARGINEANU

Expresiunea dată se mai poate scri astfel:

$$E = (5^{2p+1})^4 + 4 . (5^{2p+1})^3 + 6 . (5^{2p+1})^3 + 4 . (5^{2p+1}) + 1,$$

sau:

$$E = (5^{2p+1} + 1)^4.$$

Cum însă:

$$1296 = 6^4,$$

trebuie a arăta că avem:

$$5^{2p+1} + 1 = \text{mult. } 6.$$

Observăm însă că avem succesiv:

$$5^{2p+1} + 1 = (6-1)^{2p+1} + 1 = 6^{2p+1} + (-1)^{2p+1} + 1 = 6^{2p+1} - 1 + 1 = 6^{2p+1} = \text{mult. } 6.$$

Rezultă dar:

$$E = (\text{mult. } 6)^4 = \text{mult. } 6^4 = \text{mult } 1296,$$

deci expresia dată E, este divizibilă prin 1296.

Soluție dată de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Birek Vasile* (lic. Beiuş), *Boitan P Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Buzincu Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit, Craiova), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Enăsescu D. Victor* (lic. Milit., Iaşi), *Georgescu Emil, Grigore M. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Hortopan Grigore* (lic Milit., Tg-Mureş), *Ionescu Demostene* (Şc. Of. de Artilerie), *Jarda R.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Preg. de Of., (Bucureşti), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuţi), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Maşcaş Petru* (bacalaureat), *Matei Vasile* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Mosora Nicolae* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Sechel T. Mircea* (lic. Milit., N. Filipescu). *Stoica N. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Toma N. Nicolae* (lic. Milit., Tg-Mureş). *Tarălunga D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Titeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Vişa Eugen* (Blaj).

PROBLEME PROPUSE

1409. — Să se afle patratul perfect de forma $\overline{a\,b\,a\,b\,a}$, diferența dintre b şi a fiind un număr prim.

M. C POSTELNICESCU

1410. — Se cere progresia aritmetică astfel ca scăzând pe rând din suma termenilor ei, raţia, numărul termenilor şi ultimul termin mărit cu raţia şi numărul termenilor, să obţinem respectiv numerile 74, 70, 47.

M. AMARASTEANU

1411. — Să se arate că avem:

$$\frac{(cd-ab)^2-(a+b-c-d)[ab(c+d)-cd(a+b]}{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)} = 1.$$

V. ALACI

1412. — Să se stabilească identitatea:

$$\Sigma\, x(y^3-z^2)-\Sigma\,(x-y)(x+y)^2=2\,(x-y)(y-z)(z-x).$$

MARTES GRIGORE

1413. — Se dă un triunghiu B A C dreptunghic în A. Pe cateta A C ca diametru, se construeşte un cerc care tae ipotemiza B C în M; se duce tangenta la cerc în M, ea tae a doua catetă în M'. Să se arate că dacă $\sphericalangle B = 30^0$:

1°. Triunghiul B M M' este isoscel.

2°. Triunghiul B M A este dreptunghiu.

3. Să se rezolve triunghiurile A B C, B M M' şi B M A cunoscând A C = b.

MIHAIL BOTEZ

1414. — Fiind dat triunghiul A B C, luăm pe laturile B A şi C A, A B şi C B, A C şi B C lungimele $BM_a = CN_a = BC$, $AM_b = CN_b = AC$, $AM_c = BN_c = BA$ şi însemnăm cu S, S_a, S_b, S_c respectiv ariile triunghiurilor A B C, $M_a A N_a$, $M_b B N_b$, $M_c C N_c$, apoi cu r şi R razele cercurilor înscris şi circumscris lui A B C. Să se stabilească relaţia:

$$S_a + S_b + S_c = S\left(1 - \frac{2r}{R}\right).$$

V. THÉBAULT

1415. — Cele trei laturi a, b, c ale unui triunghiu fiind în progresie aritmetică, se cere:

1°. Să se stabilească relaţiile:

$$2\sin\frac{B}{2} = \cos\frac{A-C}{2},\quad 3\sin^2\frac{B}{2} = \sin A \sin C.$$

2°. Să se arate că dacă raţia progresiei este egală cu raza cercului înscris, triunghiul este dreptunghic.

CEZAR IVANESCU

1416. — Notăţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabileassă relaţia:

$$\prod(1-\cos A) = 2r^2 \sum \frac{\cos B \cos C}{bc}.$$

IOAN B POPA

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru :

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

ANUL XV. 15 SEPTEMBRIE 1935 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIBERIU POPOVICIU: DESPRE FUNCTIILE ALTERNATE DE MAI MULTE VARIABILE INDEPENDENTE
2. NOTE MATEMATICE: 12, 13.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 547, 1288, 1301, 1314, 1328 1330, 1335.
5. PROBLEME PROPUSE: 1417-1424.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că, D-l *B. I. Baidaff,* doctor în matematici, fondatorul şi conducătorul revistei »Boletin Matematico« din Buenos Aires, Republica Argentina (Avenida de Mayo 560) face parte dintre membrii »Revistei Matematice din Timişoara« şi numai din eroare n'a fost anunţat în No. 1, pe lista membrilor.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

DESPRE FUNCŢIILE ALTERNATE DE MAI MULTE VARIABILE INDEPENDENTE

DE
TIBERIU POPOVICIU
CLUJ.

1. Fie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o funcţie de n variabile independente $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se zice că această funcţie este *alternată*, dacă schimbând între ele două variabile oarecari, valoarea funcţiei rămâne aceeaş schimbând doar de semn:

$$f(x_1, .., x_i, .., x_k, .., x_n) = -f(x_1, .., x_k, .., x_i, .., x_n).$$

Schimbând între ele două variabile, zicem că am făcut *o transpoziţie*. Rezultă că o funcţie alternată nu se schimbă prin un număr par de transpoziţii şi schimbă de semn prin un număr impar de transpoziţii. Dacă două din variabile devin egale, funcţia se anulează. Rezultă apoi că oricum am permuta variabilele între ele, valoarea funcţiei devine $\pm f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. In particular dacă facem o permutare circulară a variabilelor, aceasta revine a face $n-1$ transpoziţii deci:

$$f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) = (-1)^{n-1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

2. Fie $f(x_1, x_2)$ o funcţie alternată de două variabile. Să presupunem că:

$$f(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$$

unde $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ sunt funcţii de o singură variabilă t.

Avem:

$$f(x_2, x_1) = \varphi_1(x_2) + \varphi_2(x_1),$$

dar:

$$f(x_2, x_1) = -f(x_1, x_2),$$

deci:

$$2f(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_1) + \varphi_2(x_2) - \varphi_1(x_2).$$

Notând:

$$2\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t),$$

avem deci:

$$f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) - \varphi(x_2).$$

Prin urmare, *dacă funcţia alternată* $f(x_1, x_2)$ *este suma unei funcţii numai de* x_1 *şi a unei funcţii numai de* x_2, *ea este de forma* $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$.

3. Să considerăm o funcţie alternată $f(x_1, x_2, x_3)$ de trei variabile şi să presupunem că:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_1, x_2) + \varphi_2(x_2, x_3) + \varphi_3(x_3, x_1).$$

Vom avea:

$$f(x_2, x_3, x_1) = f(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_2, x_3) + \varphi_2(x_3, x_1) + \varphi_3(x_1, x_2)$$

$$f(x_3, x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(x_3, x_1) + \varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_3(x_2, x_3).$$

Adunând aceste trei relaţii şi punând:

$$3\varphi(t, u) = \varphi_1(t, u) + \varphi_2(t, u) + \varphi_3(t, u),$$

avem:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_2, x_3) + \varphi(x_3, x_1).$$

Dacă facem $x_1 = x_2 = x_3 = x$, deducem:

$$0 = 3\varphi(x, x).$$

Făcând apoi $x_2 = x_3$, avem:

$$0 = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_2, x_2) + \varphi(x_2, x_1)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = -\varphi(x_2, x_1),$$

prin urmare $\varphi(t, u)$ este o funcţie alternată.

Deci, *dacă funcţia alternată* $f(x_1, x_2, x_3)$ *este suma a trei funcţii depinzând respectiv numai de câte două din variabilele* x_1, x_2, x_3, *ea este neapărat de forma:*

$$\varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_2, x_3) + \varphi(x_3, x_1),$$

unde $\varphi(t,u)$ este o funcție alternată de două variabile.

4. Să considerăm acum o funcție alternată de n variabile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Vom zice despre această funcție că *este de forma* (A^n), dacă ea este suma a n funcții depinzând numai de câte $n-1$ din variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) + g_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots + g_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots + g_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

și dacă, *una cel puțin din aceste funcții g_i se anulează identic.*

In simbolul (A^n) indicele superior n indică numărul variabilelor funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Vom zice despre funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ că este de forma (B_k^n), dacă ea este o sumă de funcții depinzând numai de câte k din variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

5. Să presupunem că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de forma (B_1^n) $(n > 2)$. Aceasta înseamnă că:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_1(x_1) + h_2(x_2) + \cdots + h_n(x_n).$$

Se vede imediat că funcția noastră este și de forma (A^n), căci putem lua de exemplu:

$$g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = h_2(x_2) + h_3(x_3) + \cdots + h_n(x_n)$$
$$g_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) = h_1(x_1)$$
$$g_3 \equiv g_4 \equiv \cdots \equiv g_n \equiv 0.$$

Să presupunem că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de forma (B_2^n) $(n > 3)$. Atunci:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^{n} h_{\alpha,\beta}(x_\alpha, x_\beta).$$

Zic că și această funcție este de forma (A^n). E suficient să punem:

$$g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\beta=\alpha+1}^{n} h_{\alpha,\beta}(x_\alpha, x_\beta)$$
$$g_2(x_1, x_3, \ldots, x_n) = \sum_{\beta=3}^{n} h_{1,\beta}(x_1, x_\beta)$$
$$g_3(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n) = h_{1,2}(x_1, x_2)$$
$$g_4 \equiv g_5 \equiv \cdots \equiv g_n \equiv 0.$$

Să presupunem acum că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de forma (B_k^n) $(n > k+1)$. Atunci:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_1=1}^{n-k+1} \sum_{\alpha_2=\alpha_1+1}^{n-k+2} \sum_{\alpha_3=\alpha_2+1}^{n-k+3} \cdots$$
$$\cdots \sum_{\alpha_k=\alpha_{k-1}+1}^{n} h_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}).$$

Să punem:

$$g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) =$$
$$\sum_{\alpha_1=2}^{n-k+1} \sum_{\alpha_2=\alpha_1+1}^{n-k+2} \cdots \sum_{\alpha_k=\alpha_{k-1}+1}^{n} h_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k})$$

$$g_2(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n) =$$
$$\sum_{\alpha_2=3}^{n-k+2} \sum_{\alpha_3=\alpha_2+1}^{n-k+3} \cdots \sum_{\alpha_k=\alpha_{k-1}+1}^{n} h_{1,\alpha_2\alpha_3,\ldots,\alpha_k}(x_1, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$$

. . . . . .

$$g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha_i=i+1}^{n-k+i} \sum_{\alpha_{i+1}=\alpha_i+1}^{n-k+i+1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{\alpha_k=\alpha_{k-1}+1}^{n} h_{1,2,\ldots,i-1,\alpha_i,\ldots,\alpha_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{\alpha_i} \ldots x_{\alpha_k})$$

. . . . . .

$$g_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$
$$\sum_{\alpha_k=k+1}^{n} h_{1,2,\ldots,k-1,\alpha_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{\alpha_k})$$

$$g_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+2}, \ldots, x_n) =$$
$$h_{1,2,\ldots,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$
$$g_{k+2} \equiv g_{k+3} \equiv \cdots \equiv g_n = 0.$$

Prin urmare, dacă o funcție alternată $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de forma (B_k^n) unde $k>n-1$, atunci această funcție este și de forma (A^n).

6. Să luăm acum funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de forma (A^n). Putem presupune, pentru fixarea ideilor, că g_n este identic nul. Făcând $x_1 = x_n$, avem:

$$g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n) + g_2(x_n, x_3, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$\cdots g_{n-1}(x_n, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n) = 0.$$

Se vede dar că $g_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ este o sumă de funcții depinzând numai de câte $n-2$ din variabilele $x_2, x_3, \ldots, x_n$, fiecare termen al acestei sume depinzând și de x_n.

Făcând apoi succesiv:

$$x_2 = x_n,\ x_3 = x_n, \ldots, x_{n-1} = x_n,$$

găsim că $g_2, g_3, \ldots, g_{n-1}$ se bucură de aceeaşi proprietate. Ţinând seamă de aceste valori vedem că $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este de forma (B^n_{n-2}). Mai mult, fiecare funcţie h care compune pe $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ depinde $n-2$ variabile, *printre cari se găseşte totdeauna şi* x_n. Dacă deci dăm lui x_n o valoare constantă a_n, de altfel arbitrară, *funcţia*:

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a_n)$$

de $n-1$ *variabile, va fi o funcţie alternată de forma* (B^{n-1}_{n-3}). Rezultă dar, că $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ va fi de forma (A^{n-1}).

Repetând acest procedeu asupra funcţiei $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, găsim că:

Dacă într'o funcţie alternată $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de forma* (A^n), *dăm variabilelor* $x_4, x_5, \ldots, x_n$ *nişte valori constante arbitrare* $a_4, a_5, \ldots, a_n$, *obţinem o funcţie alternată de trei variabile* x_1, x_2, x_3 *şi de forma* (A^3).

Să considerăm în fine funcţia alternată:

$$F(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, a_4, a_5, \ldots, a_n)$$

de forma (A^3). Vom avea:

$$F(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_2, x_3) + g_2(x_1, x_3),$$

de unde:

$$F(x_2, x_2, x_3) = 0 = g_1(x_2, x_3) + g_2(x_3, x_3),$$

deci:

$$F(x_1, x_2, x_3) = g_1(x_2, x_3) - g_1(x_1, x_3).$$

Deducem apoi că:

$$g_1(x_2, x_3) = g_1(x_3, x_3)$$

şi prin urmare $F(x_1, x_2, x_3)$ *este identic nul.*

Constantele $a_4, a_5, \ldots, a_n$ fiind luate oricum, rezultă că avem proprietatea:

O funcţie alternată $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de forma* (A^n) *este identic nulă.*

Ţinând seamă de rezultatele de la No. 5, avem că:

O funcţie alternată $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de forma* (B^n_k) *unde* $k < n-1$ *este identic nulă.*

7. Să presupunem acum că funcţia alternată $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este suma a n funcţii depinzând numai de câte $n-1$ din variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2}).$$

Presupunând n impar, o permutare circulară a variabilelor, nu schimbă valoarea funcţiei. Punând atunci:

$$n\,\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

şi făcând suma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}) = n f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

găsim:

(1) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2}).$$

Să punem acum:

$$\varphi(x_1 x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a),$$

a fiind o constantă fixă. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ este o funcţie alternată. Mai mult, se verifică imediat că:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2})$$

şi deci:

(2) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2}),$$

sunt funcţii alternate de n variabile.

Dar avem:

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x_1 x_2, \ldots, x_{n-1},) - \sum_{i=2}^{n} \Phi(x_i, \ldots, x_{n-1}, a, x_1, \ldots, x_{i-2}).$$

Punând această valoare în (1), găsim că funcţia (2) este egală cu:

$$- \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Phi(x_{i+j}, x_{i+j+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{j-2}, a, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+i-2})^{1)}$$

---

[1]) Dacă i nu este cuprins între 1 şi n, x_i este egal cu $x_{i'}$ unde i' este un număr cuprins între 1 şi n astfel ca diferenţa $i - i'$ să fie un multiplu (pozitiv sau negativ) de n.

şi *este deci de forma* (B_{n-2}^{n}). Rezultă deci că această funcţie e identic nulă. Avem dar proprietatea:

Dacă o funcţie alternată de un număr impar n de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *este o sumă de funcţii depinzând numai de câte* $n-1$ *din aceste variabile, ea este neapărat de forma:*

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2}),$$

unde $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ *este o funcţie alternată de* $n-1$ *variabile.*

8. Dacă n este par, o permutare circulară a variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ schimbă semnul funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vom pune în acest caz:

$$n\,\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

şi ţinând seamă de:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}) =$$

$$n f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

vom avea:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Phi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2}).$$

Procedând ca mai sus, deducem că:

Dacă o funcţie alternată de un număr par n de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *este o sumă de funcţii depinzând numai de câte* $n-1$ *din aceste variabile, ea este neapărat de forma:*

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \varphi(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-2}),$$

unde $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ *este o funcţie alternată de* $n-1$ *variabile.*

9. Avem un exemplu de funcţie tratată mai sus, luând determinantul lui *Van der Monde.*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_i & x_i^2 \ldots x_i^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Vom putea lua în acest caz:

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) =$$

$$(-1)^{n-1} u_1 u_2 \ldots u_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & u_i & u_i^2 \ldots u_i^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, \ldots, n-1).$$

NOTE MATEMATICE

12. — *Décomposition des nombres premiers de la forme* $4n+1$ *et de leurs puissances en une somme de deux carrés.*

Fermat a enoncé que toute puissance $(2n-1)^2$ et $(2n)^2$ d'un nombre premier de la forme $4r+1$ est décomposable, de n façons, en une somme de deux carrés. J'obtiens aisément ces décompositions en appliquant plusieurs fois de suite la relation:

$$(m^2+n^2)(p^2+q^2) = (mp \mp nq)^2 + (mq \pm np)^2.$$

Puissances de 5.

$5 = 2^2+1^2$

$5^2 = 4^2+3^2$

$5^3 = 5^2+10^2 = 2^2+11^2$

$5^4 = 15^2+20^2 = 7^2+24^2$

$5^5 = 10^2+35^2 = 25^2+50^2 = 38^2+41^2$

$5^6 = 35^2+120^2 = 44^2+117^2 = 75^2+100^2$

$5^7 = 29^2+278^2 = 50^2+275^2 = 125^2+250^2$
$= 190^2+205^2$

$5^8 = 175^2+600^2 = 220^2+585^2 = 336^2+527^2$
$= 375^2+500^2$

$5^9 = 145^2+1390^2 = 250^2+1375^2 = 625^2+1250^2$
$= 718^2+1199^2 = 950^2+1025^2$

$5^{10} = 237^2+3116^2 = 875^2+3000^2 = 1100^2+2925^2$
$= 1680^2+2625^2 = 1875^2+2500^2.$

Puissances de 13.

$13 = 2^2+3^2$

$13^2 = 5^2+12^2$

$13^3 = 9^2+46^2 = 26^2+39^2$

$13^4 = 65^2+156^2 = 119^2+120^2$

$13^5 = 117^2+598^2 = 122^2+597^2 = 338^2+507^2$

$13^6 = 828^2+2035^2 = 845^2+2028^2 = 1547^2+1560^2$

$13^7 = 1521^2+7774^2 = 1586^2+7761^2$
$= 4394^2+6591^2 = 4449^2+6554^2$

$13^8 = 239^2+28560^2 = 10764^2+26455^2$
$= 10985^2+26364^2 = 20111^2+20280^2$

$13^9 = 19773^2+101062^2 = 20618^2+100893^2$
$= 56403^2+86158^2 = 57837^2+85202^2$
$= 57122^2+85683^2$

$13^{10} = 3107^2+371280^2 = 139932^2+343915^2$
$= 142805^2+342732^2 = 145668^2+341525^2$
$= 261443^2+263640^2.$

Puissance de 17.

$17 = 1^2+4^2$

$17^2 = 8^2+15^2$

$17^3 = 17^2+68^2 = 47^2+52^2$

$17^4 = 136^2+255^2 = 161^2+240^2$

$17^5 = 799^2+884^2 = 289^2+1156^2 = 404^2+1121^2$

$17^6 = 495^2+4888^2 = 2312^2+4335^2 = 2737^2+4080^2$

$17^7 = 2908^2+20047^2 = 6868^2+19057^2$
$= 4913^2+19652^2 = 13583^2+15028^2$

$17^8 = 8415^2+83096^2 = 31679^2+77280$
$= 39304^2+73695^2 = 46529^2+69360^2$

$17^9 = 49436^2+340799^2 = 116756^2+323969^2$
$= 203996^2+277441^2 = 83521^2+334084^2$
$= 230911^2+255476^2$

$17^{10} = 143055^2+1412632^2 = 538543^2+1313760^2$
$= 790993^2+1179120^2 = 905768^2+1093425^2$
$= 668168^2+1252815^2.$

Puissance de 29.

$29 = 2^2+5^2$

$29^2 = 20^2+21^2$

$29^3 = 65^2+142^2 = 58^2+145^2$

$29^4 = 41^2+840^2 = 580^2+609^2$

$29^5 = 1475^2+4282^2 = 1885^2+4118^2$
$= 1682^2+4205^2$

$29^6 = 1189^2+24360^2 = 15939^2+18460^2$
$= 17661^2+16820^2$

$29^7 = 42775^2+124178^2 = 54665^2+119422^2$
$= 116615^2+60422^2 = 48778^2+121945^2$

$29^8 = 34481^2+706440^2 = 512169^2+487780^2$
$= 68880^2+703919^2 = 462231^2+535340^2$

$29^9 = 1240475^2+3601162^2 = 1585285^2+3463238^2$
$= 1063438^2+3657355^2 = 1752238^2+3381835^2$
$= 1414562^2+3536405^2$

$29^{10} = 999949^2+20486760^2 = 13404699^2$
$+ 15524860^2 = 14852901^2+14145620^2$
$= 1997520^2+20413651^2 = 12631900^2$
$+ 16159899^2.$

A. GLODIN
(Luxembourg)

13. — *Diamètres remarquables du cercle circonscrit au triangle.*

1. Un diamètre quelconque Δ_α du cercle (O), de rayon R, circonscrit à un triangle de côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, coupe les côtés BA, AC en M, N. Soient α, β, γ les projections orthogonales des sommets A, B, C sur Δ_α, P et Q les intersections des droites CO, BO avec BA, AC. Posant, en grandeur et en signe,

(1) $BM : MA = B\beta : A\alpha = x$, $CN : NA = C\gamma : A\alpha = y$,
$AP : PB = \sin 2B : \sin 2A = m$, $AQ : QC = \sin 2C : \sin 2A = n$,

on a la relation :

2) $$x \sin 2B + y \sin 2C = \sin 2A.$$ [1]

2. Si l'on suppose qu'il existe un diamètre Δ_α pour lequel on a :

(3) $$\overline{A\alpha}^2 = B\beta \cdot C\gamma ;$$

en vertu de (1) :

(4) $$xy = B\beta \cdot C\gamma : \overline{A\alpha}^2 = 1, \text{ (avec } x > 0).$$

Les relations (3), (4) conduisent à l'équation :

(5) $$x^2 \sin 2B - x \sin 2A + \sin 2C = 0,$$

dont les racines :

(6) $$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left[\sin 2A \pm \sqrt{\sin^2 2A - 4 \sin 2B \sin 2C}\right]$$
$$= \frac{1}{2R}\left[a \cos A \pm \sqrt{a^2 \cos^2 A - 4bc \cos B \cos C}\right],$$

suffisent à déterminer deux points M_α, M'_α sur le côté BA et, par suite, deux diamètrés Δ_α, Δ'_α vérifiant la relation (3).

N. B. Lorsque l'un des angles B ou C est obtus, l'équation (5) a ses racines réelles ; il y a deux solutions. Si le triangle fondamental est rectangle en A, les racines x_1, x_2 sont imaginaires ; il n'y a pas de solution — quand le triangle est rectangle en B ou C :

$$x_1 = x_2 = \frac{a}{R} \cos A = \sin 2C \text{ (ou } \sin 2B).$$

Enfin, si le discriminant de (5) est nul :

$$x_1 = x_2 = \frac{a}{2R} \cos A.$$

3. Nous avons montré qne les distances des sommets A, B, C du triangle à un diamètre quelconque Δ_α du cercle circonscrit sont égales aux distances des pieds A_n, B_n, C_n des hauteurs à l'or-

[1] *Journal de Vuibert, XXXVIII* — 87.

thopole φ_a du diamètre Δ_a. [1] Dans le cas particulier où le diamètre Δ_a dètermine la relation (3), on peut donc énoncer cette proposition:

Les distances de l'orthopôle φ_a du diamètrè Δ_a, aux sommets du triangle orthique A_n, B_n, C_n, sont en progression géométrique.

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XL, No. 12, August 1935. Sur des triples de cercles associés au triangle, par *R. Goormaghtigh*. Vechile geometrii românești (urmare), de *I. Ionescu*. Din geometria triunghiului, de *General Gh. I. Popescu*.

2. *Boletin Matematico*, anul VIII, No. 5, Iunie 1935, *Buenos Aires*. Studiul derivatei unei medii generale, de *B. I. Baidaff* și *J. Barral S.* Ecuațiunea:

$$A_1^n + A_2^n + A_3^n + \cdots = B_1^n + B_2^n + B_3^n + \cdots, \qquad n = 1, 2, 3, 4$$

și formele înrudite, de *A. Moessner*.

3. *Revista cercului de studii al Școalei Superioare P. T. T., Timișoara*, anul IV, N-rele 7—8.

4. Prof. Ing. *C. C. Teodorescu*. Nouvel emploi des moments d'inertie aux questions statistiques. (Actes du Congrès Interbalcanique de mathématiciens, Athènes 2—9 Septembre 1934).

5. Prof. Ing. *C. C. Teodorescu*. recteur de l'école Polytechnique de Timișoara. Allocution à l'ocasion du Congrès Interbalcanique.

6. *Caïus Jacob*. Sur un problème concernant les jets gazeux. (Extras din Mathematica, vol. VIII, 1934).

7. *Dr. Caïus Jacob*. Sur la détermination des fonctions harmoniques conjugués par certaines conditions aux limites. (Thèses, 1935).

PROBLEME REZOLVATE

547. — *Să se găsească numerele întregi pozitive* N *și n știind că* N^n *este egal cu numărul ce se obține scriind unul după altul numerele* $N - n$ *și* $N - 2n$.

G-L GH. BUICLIU

Fie i numărul cifrelor lui N. Numărul cifrelor numărului ce se formează scriind pe $N - n$ și $N - 2n$ unul după altul va fi cel mult $2i$, deci N^n va avea cel mult $2i$ cifre:

Avem deci:

$$10^{i-1} \leqq N < 10^i$$

$$10^{ni-n} \leqq N^n < 10^{ni},$$

de unde, fiind că N^n are cel mult $2i$ cifre, urmează că:

$$2i \geqq ni - n + 1$$

$$i < \frac{n-1}{n-2} = 1, \ldots$$

adică i este cel mult egal cu 1 și deci N^n are cel mult două cifre. — Dar între numerile de două cifre sunt puteri perfecte:

$$2^4 = 16,\ 2^5 = 32;\ 2^6 = 64,$$
$$3^3 = 27,\ 3^4 = 81;\ 4^2 = 16$$
$$4^4 = 64;\ 5^2 = 25;\ 6^2 = 36;$$
$$7^2 = 49;\ 8^2 = 64;\ 9^2 = 81,$$

din care numai 8^2 este de forma cerută în enunț. Singura soluție a problemei este deci:

$$8^2 = 64.$$

Se poate proceda și în felul următor pentru a găsi soluția, după ce s-a observat că N^n are cel mult $2i$ cifre. Se știe că dacă $i > 1$, patratul unui număr are $2i - 1$ sau $2i$ cifre, cubul unui număr de i cifre are $3i - 1$ sau $3i$ cifre, bipatratul..... etc. Rezultă că n nu poate fi de cât 2 și atunci ecuația problemei este:

$$N^2 = (N - 2)\,10^p + N - 4,$$

unde p este numărul cifrelor lui $N - 4$. De aici se scoate:

$$N^2 (10^p + 1) N + 2 \cdot 10^p + 4 = 0$$

$$N = \frac{10^p + 1 \pm \sqrt{10^{2p} - 6 \times 10^p - 15}}{2}.$$

Pentru ca N să fie întreg trebue ca:

$$10^{2p} - 6 \times 10^p - 15 = x^2$$

$$10^p = 3 \pm \sqrt{24 + x^2},$$

ceea ce necesită:

$$24 + x^2 = y^2$$

$$y^2 - x^2 = 24, \text{ sau } (y - x)(y + x) = 24,$$

x și y fiind doi divizori de aceiași paritate ai lui 24. Se găsește ușor că nu putem avea de cât:

$$y = 7,\ x = 5, \text{ sau } y = 5,\ x = 1,$$

din care numai primul întrodus în membrul II al lui (1) dă o putere a lui 10, anume puterea 1. Deci $p = 1$ și se deduce No. 8.

D-nii *Beșchea N.*, *Dănciulescu Gr. V.*, și *Popescu N. Corneliu* au considerat cazul general și au găsit soluția exactă făcând raționamente neriguroase.

Au găsit soluția exactă examinând numai cazul $i = 1$ d-nii: *Antoniu V.*, *Arsene Al.*, *David I.*, *Dimitriu At. I.*,

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1910 - 274

Florescu T. C., Ionescu C. C., Iovănescu T. R., Panaite N. Th., Philips I., Popescu D. St., Râmniceanu I. Cr., Roman I. I., Sassu V. I., Savin C. I., Şoimulescu I. şi *Sprinceană C. Gh.*

GH. B.

1288. — *Cineva depune* $\frac{1}{3}$ *din capitalul său cu* 5%, $\frac{1}{4}$ *din rest cu* 8% *şi restul cu* 10%. *După 2 ani uneşte capitalurile împreună cu dobânzile lor şi depune* $\frac{1}{5}$ *din noul capital cu* 3%, $\frac{1}{2}$ *cu* 9%, $\frac{1}{6}$ *cu* 12% *şi restul cu* 15%. *După 5 ani uneşte toate capitalurile împreună cu dobânzile lor şi are suma de* 6,076.080. *Se cere să se calculeze capitalul iniţial şi cele trei părţi iniţiale, precum şi cele patru părţi depuse ulterior.*

VIRGIL CLAUDIAN

Prima parte este $\frac{1}{3}$ din capital; a 2^a parte este $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$ din capital. Adunând avem:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},$$

deci a 3^a parte este $\frac{1}{2}$ din capital. Să vedem cum sunt distribuite părţile ulterioare. Prima parte este $\frac{1}{5}$ din capitalul total după 2 ani; a 2^a parte este $\frac{1}{2}$ din acest capital; a 3^a parte este $\frac{1}{6}$ din acelaş capital. Adunând avem:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{6+15+5}{30}=\frac{13}{15},$$

deci a 4^a parte din acelaşi capital este $\frac{2}{15}$ din el.

Pornim acum de la un capital iniţial oarecare, de exemplu $C=300$. Primele trei părţi, cum prevede enunţul, ar fi:

$$\frac{1}{3}C=100 \text{ lei}, \quad \frac{1}{6}C=50 \text{ lei}, \quad \frac{1}{2}C=150 \text{ lei},$$

iar dobânzile corespunzătoare, conform enunţului, ar fi:

$$D_1=\frac{100\times5\times2}{100}=10 \text{ lei}, \quad D_2=\frac{50\times8\times2}{100}=8 \text{ lei},$$

$$D_3=\frac{150\times10\times2}{100}=30 \text{ lei}.$$

Capitalul cu dobânzile corespunzătoare, după 2 ani, ar fi:

$$C+D_1+D_2+D_3=348 \text{ lei}=A.$$

Părţile următoare puse la dobândă ar fi:

$$\frac{1}{5}A=69{,}60 \text{ lei}; \quad \frac{1}{2}A=174 \text{ lei};$$

$$\frac{1}{6}A=58 \text{ lei}; \quad \frac{2}{15}A=46{,}40 \text{ lei};$$

iar dobânzile corespunzătoare acestor capitaluri, ar fi conform enunţului:

$$d_1=\frac{69{,}60\times3\times5}{100}=10{,}44 \text{ lei};$$

$$d_2=\frac{174\times5\times9}{100}=78{,}30 \text{ lei};$$

$$d_3=\frac{58\times5\times12}{100}=34{,}80 \text{ lei};$$

$$d_4=\frac{46.40\times5\times15}{100}=34{,}80 \text{ lei}.$$

Capitalul de la sfârşitul celor 2 ani, cu dobânzile corespunzătoare pe 5 ani, ar fi:

$$A+d_1+d_2+d_3+d_4=506{,}34 \text{ lei}.$$

Acum facem următorul raţionament:

Dacă, 506,34 provine de la capitalul 300 lei,
atunci, 6076080 „ „ „ x,

de unde deducem:

$$x=\frac{6076080\times300}{506{,}34}=\frac{6076080\times10000}{16878}=$$

3600000 lei.

Capitalul iniţial este deci, 3600000 lei; primele trei părţi, adică $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$ din el, sunt:

1200000 lei, 600000 lei, 1800000 lei.

Dobânzile acestor capitaluri pe 2 ani sunt:

$$\frac{1200000 \times 2 \times 5}{100} = 120000 \text{ lei},$$

$$\frac{600000 \times 8 \times 2}{100} = 96000 \text{ lei},$$

$$\frac{1800000 \times 10 \times 2}{100} = 360000 \text{ lei},$$

iar capitalul strâns împreună cu dobânzile corespunzătoare pe aceşti 2 ani, este:

$3600000 + 120000 + 96000 + 360000 = 4176000$ lei

Cele 4 părţi depuse ulterior fiind $\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{2}{15}$ din capitalul de 4176000, ele sunt respectiv:

835200 lei, 2088000, 696000 lei şi 556800 lei.

Problema este astfel complect rezolvată.

Soluţii date de d-nii: *Bejenaru Gh. Victor* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Capotă Gh.* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Drăghici St. Cornel* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Florescu Haralambie*, *Florescu Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Grumăzescu Mircea* (Şc. of. de artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mănac D. Vasile* (lic. Milit., N. Filipescu), *Maşcaş Petru* (bacalaureat), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Pambucdjian Chircor* (lic. Constanţa), *Pană Petre* (lic. (Milit., N. Filipescu), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit, Timişoara), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Săvulescu Spirea* şi *Toma N. Nicolae*.

1301. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z+xy+yz+zx+xyz=-1 \\ x^2+y^2+z^2+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2z^2=19 \\ x^2yz+xy^2z+xyz^2+xy+yz+zx=-5 \end{cases}$$

M. AMARASTEANU

Notând pentru prescurtare:

$$(1) \qquad \begin{cases} x+y+z=s \\ xy+yz+zx=p \\ xyz=q \end{cases}$$

observăm că sistemul dat se poate scri:

$$(2) \qquad \begin{cases} s+p+q=-1 \\ s^2-2p+p^2-2sq+q^2=19 \\ sq+p=-5 \end{cases}$$

A 2-a ecuaţie din (2) scriindu-se şi sub forma:

$$(s+p+q)^2-2(sp+pq+qs)-2(sq+p)=19,$$

devine ţinând seamă de prima şi ultima ecuaţie din (2):

$$1-2(sp+pq+sq)+10=19,$$

sau:

$$(3) \qquad p(s+q)+sq=-4.$$

Cum din prima şi ultima ecuaţie din (2), avem:

$$s+q=-1-p$$

$$sq=-5-p,$$

ecuaţia (3) devine:

$$p(-1-p)-5-p=-4$$

sau:

$$p^2+2p+1=0,$$

deci:

$$p=-1,$$

valoare, care înlocuită în prima şi ultima ecuaţie din (2) ne dă:

$$\begin{cases} s+q=0 \\ sq=-4 \end{cases}$$

Acest sistem rezolvat, ne dă:

$$s=-q=\pm 2.$$

Rezultă că sistemul (2), are următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} s=2 \\ p=-1 \\ q=-2 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} s=-2 \\ p=-1 \\ q=2 \end{cases}$$

Sistemul (1) devine astfel:

$$(4) \qquad \begin{cases} x+y+z=\pm 2 \\ xy+yz+zx=-1 \\ xyz=\mp 2 \end{cases}$$

Aceste ecuaţii scriind suma, suma produselor câte două şi produsul lui x, y, z, rezultă că x, y, z sunt rădăcinele ecuaţiilor:

$$t^3-2t^2-t+2=0$$

$$t^3+2t^2-t-2=0.$$

Cum aceste ecuaţii descompuse în factori, devin:

$$(t-1)(t-2)(t+1)=0$$

$$(t-1)(t+2)(t+1)=0,$$

rezultă că sistemele de soluţii a sistemului (4) şi deci a sistemului dat, sunt:

x	1	1	2	2	−1	−1	1	1	−2	−2	−1	−1
y	2	−1	1	−1	2	1	−2	−1	1	−1	−2	1
x	−1	2	−1	1	1	2	−1	−2	−1	1	1	−2

Soluţii date de d-nii: *Cazanacli P.* (Chişinău), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Marnea Desideriu* (lic. (Beiuş), *Mascaş Petru* (bacalaureat), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Murgu N.* (lic. Beiuş), *Săvulescu Spirea* (Şc. Polit., Bucureşti) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Tg-Mureş).

1314. — *Dacă într'un triunghiu* A B C *se duce din* D, *piciorul bisectoarei unghiului* B *pe* A C, *o paralelă* D E *la* B C *şi dacă avem*:

$$DE=DC,$$

să se demonstreze că triunghiul A B C *este isoscel.*

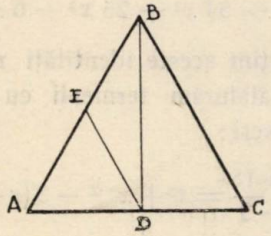
V. ALACI

Prima soluţie. B D fiind bisectoarea unghiului B, avem:

(1) $$\sphericalangle DBC=\sphericalangle EBD.$$

Apoi D E fiind paralelă cu B C, rezultă:

(2) $$\sphericalangle DBC=\sphericalangle BDE,$$



ca alterne interne. Din (1) şi (2) rezultă:

$$\sphericalangle EBD=\sphericalangle BDE,$$

adică triunghiul E B D este isoscel şi deci:

(3) $$BE=DE.$$

Cum prin ipoteză:

$$DE=DC,$$

rezultă din (3):

$$BE=DC.$$

Trapezul B E D C este deci isoscel şi atunci:

$$\sphericalangle EBC=\sphericalangle DCB,$$

adică triunghiul A B C este isoscel.

Soluţie dată de d-rele: *Naneş Cornelia* (bacalaureată, Bucureşti), *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Apostol* (lic. Milit, N. Filipescu), *Birek Vasile* (lic, Beiuş), *Boiangiu I. Gh.* (lic Milit, N. Filipescu), *Capotă Gh.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Ciucă I. Ioan* (lic. Tg-Mureş), *Czervesz Ioan* (lic. Beiuş), *Dobrescu D. Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dragomirescu I. Ilie* (lic. Milit., Craiova), *Florescu Gh. Haralambie*, *Grigorescu Vintilă* (lic. Milit., N Filipescu), *Hompola T.* (lic. Beiuş), *Ionescu C. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu). *Isac Victor* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Jarda Radu* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mănac V.* (lic. Filipescu), *Maşcaş Petru* (bacalaureat), *Matei Vasile* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Mihalcea I. Octavian* (Buzău), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Masora I. Nicolae* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş), *Popa Nicolae* (lic Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rădulescu Gh. Octavian* (lic. Milit., N. Filipescu), *Săvulescu Spirea* (Şc. Polit., Bucureşti), *Sechel Mircea* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Terpu Al. Teodor*, *Toma N. Nicolae* (lic. Milit., Tg.-Mureş) şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

Soluţia 2-a. B D fiind bisectoarea unghiului B în triunghiul A B C, putem scri:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DC}{BC},$$

sau:

(1) $$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC},$$

fiindcă D C = D E, prin ipoteză.

De altă parte, triunghiurile A E D şi A B C sunt asemenea, D E fiind paralelă cu B C şi deci rezultă:

(2) $$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{BC},$$

Din (1) şi (2) rezultă:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{AB},$$

deci:

$$AB=AC,$$

adică triunghiul A B C este isoscel.

Soluţii analoage date de d-nii: *Chievic Andruna* (lic. Chişinău), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Munteanu Lazăr* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Petrescu Anastasie* (Craiova), *Ţarălungu D-tru* (lic. Milit, Tg.-Mureş), şi *Vlad I. M.*

1328. — *Să se stabilească identităţile:*

$$\cos 2x - 3\cos x + 4 = \frac{\cos 3x + 9}{2\cos x + 3},$$

$$\cos 4x - 6\cos 3x + 25\cos 2x - 54\cos x + 42 = 2\left(\frac{\cos 3x + 9}{2\cos x + 3}\right)^2.$$

V. Alaci

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

putem scri succesiv:

$$\frac{\cos 3x + 9}{2\cos x + 3} = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x + 9}{2\cos x + 3} =$$

$$\frac{4\cos^3 x - 6\cos^2 x + 6\cos x + 6\cos^2 x - 9\cos x + 9}{2\cos x + 3} =$$

$$\frac{2\cos x\,(2\cos^2 x - 3\cos x + 3) + 3\,(2\cos^2 x - 3\cos x + 3)}{2\cos x + 3}$$

$$= \frac{(2\cos x + 3)\,(2\cos^2 x - 3\cos x + 3)}{2\cos x + 3} =$$

$$2\cos^2 x - 3\cos^2 x + 3 = (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 4$$

$$= \cos 2x - 3\cos x + 4.$$

Astfel prima identitate este stabilită.

Pentru stabilirea identităţii a 2-a, ridicăm prima identitate la patrat şi dublăm ambii membrii, avem:

$$2\left(\frac{\cos 3x + 9}{2\cos x + 3}\right)^2 = 2\,(\cos 2x - 3\cos x + 4)^2 =$$

$$2\cos^2 2x + 18\cos^2 x + 32 - 12\cos 2x\cos x$$

$$- 48\cos x + 16\cos 2x = 2\cos^2 2x + 18\cos^2 x$$

$$+ 32 - 12\,(2\cos^2 x - 1)\cos x - 48\cos x$$

$$+ 16\,(2\cos^2 x - 1) = 2\cos^2 2x - 24\cos^3 x$$

$$+ 50\cos^2 x - 36\cos x - 36\cos x + 16 =$$

$$(2\cos^2 2x - 1) - 6\,(4\cos^3 x - 3\cos x)$$

$$+ 25\,(2\cos^2 x - 1) - 54\cos x + 42 =$$

$$\cos 4x - 6\cos^3 x + 25\cos 2x - 54\cos x + 42.$$

Identitatea 2-a este şi ea stabilită:

Soluţii date de d-rile: *Naneş Cornelia* (studentă, Bucureşti), *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Birek Vasile* (lic. Beiuş), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cristea G. Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Dobrescu D. Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuţi), *Marţian V.*, *Murgu* (lic. Beiuş), *Maşcaş Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Millea G E.* (Sub-Lt), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Orăşanu Gh. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Rottemburg Arthur* (lic. Milit., Cernăuţi).

Soluţia autorului: Voesc a pune la îndemâna corespondenţilor noştrii o metodă, care să permită a găsi oricâte identităţi analoage celor din enunţ.

Pentru aceasta se efectuează câtul a două polinoame reciproce oarecare de gradele întregi $2m$ şi $2n$, $(m > n)$ divizibile unul prin altul. Apoi în identitatea:

$$\frac{P_{2m}(x)}{P_{2n}(x)} = Q_{2(m-n)}(x),$$

se face substituţia:

$$x = e^{it}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

şi în urmă se folosesc identităţile lui *Euler*.

Fie de exemplu împărţirile exacte:

$$\frac{x^6 + 18x^3 + 1}{x^2 + 3x + 1} = x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 3x + 1$$

$$\left(\frac{x^6 + 18x^3 + 1}{x^2 + 3x + 1}\right)^2 = x^8 - 6x^7 + 25x^6 - 54x^5 +$$

$$84x^4 - 54x^3 + 25x^2 - 6x + 1.$$

Dacă împărţim aceste identităţi respectiv cu x^2 şi x^4 şi apoi alăturăm termenii cu acelaşi coeficient, putem scri:

$$\frac{x^3 + x^{-3} + 18}{x + x^{-1} + 3} = x^2 + x^{-2} - 3\,(x + x^{-1}) + 8$$

$$\left(\frac{x^3 + x^{-3} + 18}{x + x^{-1} + 3}\right)^2 = x^4 + x^{-4} - 6\,(x^3 + x^{-3}) +$$

$$25\,(x^2 + x^{-2}) - 54\,(x + x^{-1}) + 84.$$

Dacă facem substituţia:

$$x = e^{it}, \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

avem:

$$\frac{e^{3it} + e^{-3it} + 18}{e^{it} + e^{-it} + 3} = e^{2it} + e^{-2it} - 3\,(e^{it} + e^{-it}) + 8$$

$$\left(\frac{e^{3it}+e^{-3it}+18}{e^{it}+e^{-it}+3}\right)^2 = e^{4it}+e^{-4it}-6\,(e^{3it}+e^{-3it})$$

$$+25\,(e^{2it}+e^{-2it})-54\,(e^{it}+e^{-it})+84.$$

Folosim aci formula lui *Euler:*

$$\cos kt = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}, \qquad (k=1, 2, 3\ldots)$$

sau:

$$e^{ikt}+e^{-ikt}=2\cos kt\,.$$

şi avem după ce simplificăm respectiv cu 2:

$$\frac{\cos 3t+9}{2\cos t+3}=\cos 2t-3\cos t+4$$

$$2\left(\frac{\cos 3t+9}{2\cos t+3}\right)^2=\cos 4t-6\cos 3t+$$

$$25\cos 2t-54\cos t+42,$$

care sunt tocmai identităţile cerute, variabila aci fiind t în loc de x.

In modul acesta am ajuns să propun identităţile din enunţ.

1330. — *Se cere un patrat perfect de cinci cifre, cu primele trei cifre în progresie aritmetică descrescătoare a căror sumă este 15, iar numărul format cu ultimele două cifre este patratul primei cifre.*

CORNELIA NANES

Fie $x+r$, x, $x-r$ primele trei cifre care formează o progresie aritmetică cu raţia r.

Conform enunţului avem:

$$(x+r)+x+(x-r)=15,$$

de unde:

$$x=5.$$

Cum raţia nu poate fi de cât 1, 2, 3, 4, fiindcă $5+r$ este cel mult 9 şi cum numărul format de ultimele două cifre a patratatului de cinci cifre cerut, este patratul primei cifre, urmează că patratul de cinci cifre cerut este printre numerile:

95181, 85264, 75349, 65436.

Numerile 95181 şi 65436 sunt divizibile prin 3, fără a fi şi prin 9, deci nu sunt patrate perfecte.

Dintre cele două numere rămase, numai 85264 este patrat perfect:

$$85264 = 292^2,$$

şi ne dă singura soluţie a problemei.

Soluţii date de d-ra *Popescu N. Maria* (studentă, Bucureşti), şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Boiangiu I. Gh.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Boitan P. Nicolae* (lic Milit., Cernăuţi), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Cavaropol Mircea* (lic. Milit., Craiova), *Cavaropol Nicolae* (lic. Milit., Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dragomirescu T. Ilie* (lic. Milit., Craiova), *Dulămiţă Gr. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Dumitraşcu Aureliu* (lic. Milit., Craiova), *Dumitru I. Cioc* (lic. Milit., Craiova), *Enăsescu D. D-tru Victor* (lic. Milit., Iaşi), *Florescu Gh. Haralambie*, *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Grigore M. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Hompola T.* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Isac C. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Păcuraru Pavel* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Pană Petre* (lic. Milit, M. Filipescu), *Pompeiu Marica* (lic Beiuş), *Ionescu Demonstene* (Şc. Ofiţeri de Art.), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc Pregăt. de Ofiţeri), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Millea G. E.* (Sub-Lt.), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Munteanu V. Lazăr* (lic. Milit., Tg.-Mures), *Opran C. Robăneşti*, *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Păcuraru Pavel* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Roman I. Victor*, *Rovenţa Octavian*, *Stănciulescu Gh.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stefănescu Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tanasiciuc V. Claudius* (lic. Milit, Cernăuţi), şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit, N. Filipescu).

Observări. 1°. S'au primit câteva soluţiuni false, deci neanunţate.

2°. Din cele anunţate sunt două identic redactate. Pe viitor nu vom mai anunţa astfel de probleme.

1335. — *Să se afle care triunghiuri verifică relaţia:*

$$p=b\cos A+c\cos B+a\cos C,$$

notaţiile fiind cele obicinuite, într'un triunghiu.

STEFAN MUSTA

In virtutea relaţiei cunoscute:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

şi a analoagelor sale, relaţia dată devine:

$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b},$$

sau:

$$a+b+c=\frac{b^2-a^2}{c}+c+\frac{c^2-b^2}{a}+a+$$

$$\frac{a^2-c^2}{b}+b.$$

Simplificând, găsim:

$$\frac{b^2-a^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}=0,$$

sau:

(1) $\quad ab\,(b^2-a^2)+bc\,(c^2-b^2)+ca\,(a^2-c^2)=0.$

Primul membru este un polinom omogen şi simetric de gradul al 4-lea, care observăm că se anulează pentru $b = a$, $c = b$ şi $a = c$; resultă că el se divide prin produsul $(b-a)\,(c-b)\,(c-a)$, câtul fiind şi el o funcţie simetrică şi de primul grad, deci de forma $A\,(a+b+c)$, astfel că putem scri:

$$(2)\quad a\,b\,(b^2-a^2) + b\,c\,(c^2-b^2) + c\,a\,(a^2-c^2) \equiv A\,(b-a)\,(c-b)\,(c-a)\,(a+b+c),$$

unde A se determină dând valori particulare lui a, b, c, astfel pentru:

$$a = 0,\ b = 1,\ c = 2,$$

relaţia (2) devine:

$$2 \times 3 = A \times 2 \times 3,$$

deci:

$$(3)\qquad A = 1.$$

Atunci relaţia (1) ţinând de (2) şi (3), devine:

$$(b-a)\,(c-b)\,(c-a)\,(a+b+c) = 0.$$

Această relaţie se verifică dacă luăm:

$$a = b;\ a = c;\ b = c;$$

sau:

$$a = b = c.$$

Prin urmare numai triunghiurile isoscele, sau echilaterale satisfac relaţia dată.

Soluţii bune date de d-nii: *Negrea A. Mircea* (Brăila) şi *Popa Nicolae* (lic. Beiuş).

Au găsit ca soluţii numai triunghiurile echilaterale, d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N Filipescu), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Pompeiu Marica* (lic. Beiuş), *Stoica Dumitru* (lic. Milit., Tg.-Mureş) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş).

Observare. S'au primit şi unele demonstraţii false, care n'au fost luate în consideratie.

PROBLEME PROPUSE

1417. — Să se demonstreze că dacă $N \neq 5$ m, atunci:

$$4\,N^9 - 3\,N^5 - N$$

este divizibil prin 75.

G-L GH. BUICLIU

1418. — Să se afle două numere de câtei trei cifre toate diferite, care se divid unul cu altul, câtul împărţirei lor fiind un cub.

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

1410. — Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinele ecuaţiei:

$$x^3 + a\,x^2 + b = 0.$$

Să se determine b, astfel ca între rădăcinele ecuaţie date să existe relaţia:

$$\Sigma\,[(x_1^2 + x_2^2)^2 - x_3^2] = a^3 + \frac{b}{a^2}.$$

In urmă, să se rezolve ecuaţia dată determinându-se a ca ea să aibă toate rădăcinele reale.

V. ALACI

1420. — Să se rezolve următorul sistem:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{12} \\ x\,y + y\,z + z\,x = 26 \end{cases}$$

MIHAIL BOTEZ

1421. — Să se demonstreze că într'un triunghiu oare-care există relaţiile:

$$\frac{a^4 + b^2\,c^2}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{b^4 + c^2\,a^2}{(b-c)\,(b-a)} + \frac{c^4 + a^2\,b^2}{(c-a)\,(c-b)} = (a+b+c)^2$$

$$\frac{a^4 - b^2\,c^2}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{b^4 - c^2\,a^2}{(b-c)\,(b-a)} + \frac{c^4 - a^2\,b^2}{(c-a)\,(c-b)} = a^2 + b^2 + c^2.$$

V. THÉBAULT

1422. — Se dă un triunghiu A B C. Pe latura B C se ia o distanţă A B = B A'. Bisectoarele interioare din A şi B se taie în I, iar cele exterioare în J. Să se arate că punctele A, I, A', B, J sunt conciclice.

MIRCEA GRUMAZESCU

1423. — Fie A M şi A N două ceviene izotomice ale triunghiulni A B C. Când cevienele se deplasează, rămânând izotomice, distanţa punctului B la dreapta ce uneşte punctele în care cercul descris pe A B ca diametru taie cele două ceviene, stă într'un raport constant cu distanţa punctului C la dreapta ce uneşte punctele în care cercul descris pe A C ca diametru taie cele două ceviene.

C. IONESCU BUJOR

1424. — Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$\frac{h_a\,h_b\,h_c}{(h_a+h_b)\,(h_b+h_c)\,(h_c+h_a)} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A + \sin B)\,(\sin B + \sin C)\,(\sin C + \sin A)}$$

ION MARGINEANU

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS
1 an: Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

ANUL XV. 15 OCTOMBRIE 1935 No. 8.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI: PATRUZECI DE ANI DE ACTIVITATE A „GAZETEI MATEMATICE".
2. B. I. BAIDAFF: ELIMINAREA FOLOSITA LA PROGRESIILE ARITMETICE, GEOMETRICE SI LA SUCCESIUNI MAI GENERALE.
3. CEZAR COSNIȚA: ASUPRA UNOR CERCURI.
2. NOTE MATEMATICE: 14, 15.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 481, 1320, 1324, 1326.
5. PROBLEME PROPUSE: 1425–1432.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând de la 15 Octomvrie 1935, mai fac parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara şi următorii foşti distinşi corespondenţi, d-nii:

1°. *Locotenent, Ionescu-Ţiu D. Constantin*, str. Popa-Tatu 17, Bucureşti.

2°. *Profesor, Mihăileanu N. Nicolae*, str. Popa-Tatu 17, Bucureşti.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

PATRUZECI DE ANI DE ACTIVITATE A »GAZETEI MATEMATICE«

de V. ALACI

„Gazeta Matematică" din București, a împlinit la 15 Septembrie c. patruzeci de ani de nobilă și strălucită activitate în agorul științei românești, ceea-ce constituie un moment important în dezvoltarea culturei noastre.

Născută prin dragostea de știință, entuziasmul tineresc și mintea luminată a cinci tineri ingineri, care abia terminaseră Școala Națională de Poduri și Șosele, Gazeta Matematică strânge în jurul său și alte energii și alte spirite de elită și își îndreaptă an de an activitatea sa, în primul rând, spre tinerii elevi de liceu, pe care îi pregătește mai serios și le însuflă gustul și spiritul de cercetări originale, în domeniul matematic.

Acești tineri elevi astfel pregătiți, care devin din ce în ce mai numerosi, natural că reușesc printre cei dintăi la examenele de intrare în școlile superioare, sau se disting în universități.

Scânteia științei aprinsă în mintea și inima lor de G. M., îi face să activeze și pe mai departe, cu puteri crescute, cu pasiune și entuziasm, în ogorul științei pure sau aplicate și această activitate spirituală le procură totdeauna acea caldă mulțumire sufletească, acel farmec deosebit și acea bucurie nețărmurită, interioară, pe care n'o poate simți de cât omul de știință.

In felul acesta, „Gazeta Matematică" reușește să formeze continuu, acea nobilă elită intelectuală, răspândită pe tot cuprinsul țărei, formată din ofițeri străluciți, ingineri cu renume, oameni de știință ce au cucerit în specialitatea lor adevăruri noiu și definitive, care toți au contribuit și contribuesc să mărească bunul renume al Țării noastre.

Iată în puține cuvinte, traectoria luminoasă, titlu de glorie neperitor ce și l-a căștigat, „G. M.", de aceea, cu prilejul sărbătorii de patruzeci de ani de activitate continuă, intensă și cu rezultate atât de impresionante, Țara întreagă se îndreaptă cu admirație și recunostință, către marii și strălucitii întemeietori a-i „Gazetei Matematice", inginerii: ION IONESCU, VICTOR BALABAN †, VASILE CRISTESCU †, MIHAIL ROCO †, ION ZOTTU † și către toți acei ce au continuat și continuă opera lor binecuvântată.

„Revista Matematică" din Timișoara, mlădiță mai tânără, care și-a primit impulsul de viață, din același izvor comun de înalte preocupări, se înscrie printre ce-i dintăi să i-a parte cu bucurie la sărbătorirea „Gazetei Matematice", să-i exprime sentimentele sale de admirație și veneratie, dorindu-i și pe mai departe, o activitate bogată, neîntreruptă și vecinică.

ELIMINAREA FOLOSITĂ LA PROGRESIILE ARITMETICE, GEOMETRICE ȘI LA SUCCESIUNI MAI GENERALE

DE
B. I. BAIDAFF
(Buenos Aires)

Scopul acestor rânduri e de a arăta, că diferitele probleme relative la progresiunile aritmetice, geometrice, sau alte succesiuni de numere, definite prin alte legi de formațiune, nu diferă în chip esențial între ele și că prin urmare se poate indica un metod unitar pentru rezolvirea lor, metod care se bazează pe teoria eliminărei.

Pentru aplicarea acestui procedeu, natural, se va ține seamă de relațiunile ce există între terminii progresiunei aritmetice sau geometrice, sau legile

mai generale în cazul succesiunilor cu alt caracter; se vor considera ca necunoscute, toţi terminii cari intervin în chestiune, şi în fine ca o nouă necunoscută, expresiunea specială — explicită sau implicită — cerută, care poate depinde de toţi sau parte din terminii definiţi mai înainte. Stabilite ecuaţiunile cari leagă toate necunoscutele ce intervin, se va proceda după aceia la eliminarea tuturor necunoscutelor ce nu interesează, pentru a obţine ecuaţiunea finală ce ne va da expresiunea specială căutată.

Trec acum la aplicarea ideei generale anterioare, la câteva exemple particulare.

Fie astfel, progresiunea aritmetică:

$$\div a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \tag{1}$$

în care se cunoaşte primul termin, a; raţia r şi numărul $n+1$ de terminii. Se cere:

1. Expresiunea terminului general, a_n; 2. Suma tuturor terminilor; 3. Produsul; 4. Suma terminilor de ordin par; 5. Suma algebrică a terminilor înmulţiţi respectiv cu factori egali cu numărul de ordine şi cu (-1) ridicat la o putere a cărui exponent e egal cu acelaş număr de ordine; etc. etc.

In baza teoriei expuse vom scri, pentru rezolvirea problemei particulare 1., ecuaţiunile cari definesc terminii progresiunei aritmetice:

$$a_0 = a\,;\ a_1 = a_0 + r\,;\ a_2 = a_1 + r\,;\ \ldots \tag{2}$$
$$\ldots\ a_n = a_{n-1} + r\,.$$

Avem aici $n+1$ ecuaţiuni, din cari nu ne interesează nici într'un chip, cei n termini, cari preced pe a_n. Asta ne îngădue să ne gândim la metoda eliminărei, şi să obţinem astfel, ecuaţiunea care să ne dea deadreptul necunoscuta cerută, a_n. Eliminantul problemei, scris sub forma de determinant, este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & r \\ 0 & -1 & 1 \ldots & 0 & 0 & r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & r - a_n \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

$$\therefore\ a_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & r \\ 0 & -1 & 1 \ldots & 0 & 0 & r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & r \end{vmatrix}$$

Pentru a calcula ultimul determinant, (ceia ce înseamnă altă etapă a problemei, şi care e în general o chestiune de abilitate), adun terminii din toate liniile la ultima, şi se obţine o nouă linie în care toate elementele sunt nule, cu excepţia ultimului, care e egal cu $a + n r$, aşa că desvoltând după această nouă linie se regăseşte cunoscuta formulă:

$$a_n = a + n r.$$

Pentru răspuns la a doua cerere, va fi nevoie să adăugăm sistemului (2), ecuaţiunea:

$$s = a_0 + a_1 + \cdots + a_n, \tag{4}$$

în care s, e suma căutată, şi apoi să eliminăm necunoscutele ce nu ne interesează: $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Ecuaţiunea ce ne dă pe s, e:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & r \\ 0 & -1 & 1 \ldots & 0 & 0 & r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 & r \\ 1 & 1 & 1 \ldots & 1 & 1 & s \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

şi care rezolvită direct, *fără a presupune cunoaşterea sumei primilor n numere întregi, ne conduce la expresiunea clasică*:

$$s = a(n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) r\,. \tag{6}$$

(Pentru a nu lungi prea mult acest articol, propun resolvirea ecuaţiunea (5) în altă parte a revistei).

Răspunsul chestiunei produsului, p:

$$p = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n, \tag{7}$$

ne va conduce, după eliminarea elementelor ce nu interesează, şi fără nici o altă simplificare remarcabilă, la:

$$p = a(a+r)(a+2r)\ldots(a+nr). \tag{8}$$

Pentru rezolvirea problemei particulare 4., se va înlocui în (5) ultima linie prin:

$$1\ 0\ 1\ 0 \ldots t, \tag{9}$$

fiind t suma cerută. Natural, că va apare alt determinant, al cărui calcul e altă chestiune, de care se poate ocupa cetitorul doritor a o duce la capăt, lucru ce nu intră în preocuparea mea acum.

Pentru a răspunde la problema particnlară 5., se va înlocui aceiaş linie prin:

$$(10) \qquad 1 \; -2 \; 3 \; -4 \ldots u,$$

fiind u noua sumă cerută. Aici e loc de făcut aceiaş observaţie ca mai înainte.

Şi acum, dacă am trece la progresiile geometrice, ideia călăuzitoare va fi aceiaş. Se vor scri rând pe rând, întrebuinţând notaţiile întrucâtva schimbate şi impuse de uz:

$$(1') \qquad \div a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

$$(2') \qquad a_0 = a, a_1 = a_0 q, a_2 = a_1 q, \ldots, a_n = a_{n-1} q$$

$$(4') \qquad s = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$(7') \qquad p = a_0 a_1 a_2 \ldots a_n,$$

şi natural, că, întocmai ca mai înainte, se vor elimina terminii intermediari $a_0, a_1, \ldots a_n$. Rezultatele eliminării, cari se pot face pe diferite căi, vor fi natural cele cunoscute, şi de aceia nici nu le reproduc, cu atât mai mult, cu cât dorinţa mea era arătarea faptului, că diferitele probleme considerate înainte, *aparţin unui acelaş tip de probleme algebrice*, cari urmăresc aflarea unor necunoscute speciale, ca suma, produsul, diferenţele de rang anumit, etc. etc., în funcţiune de date, şi că de aici, în ultimă analiză şi în mod teoretic, toate se pot rezolvi cu ajutorul eliminării.

Cele expuse până aci pot fi sintetizate în următoarea problemă generală:

Se dau numerile $a_0, a_1, \ldots a_n$, *definite prin relaţiunile:*

$$f_i(a_0, a_1, \ldots, a_n) = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

şi se cer expresiunile $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_p$, *cari depind de numerile anterioare, prin noile relaţiuni*

$$g_j(a_0, a_1, \ldots, a_n; E_0, E_1, \ldots, E_p) = 0$$
$$(j = 0, 1, \ldots, p).$$

In *teorie* problema se rezolvă eliminând de la început numerile $a_0, a_1, \ldots, a_n$, cari nu ne interesează a le cunoaşte, ceia ce ne va conduce la un sistem de ecuaţiuni în $E_0, E_1, \ldots, E_p$:

$$h_k(E_0, E_1, \ldots, E_p) = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, p),$$

şi pentru care, în *practică*, se vor intrebuinţa orice metode algebrice pentru rezolvirea lui.

Dacă s'ar examina toate problemele şi exerciţiile propuse în *Revista Matematică din Timişoara* şi în *Gazeta Matematică*, şi multe articole din alte reviste importante, fără îndoială, că surprinderea cercetătorului nu va fi mică, constatând că multe din interesantele chestiuni relaţionate cu progresii, serii şi succesiuni de numere, se pot clasifica şi rezolvi, urmând norma indicată în aceste rânduri, şi că multe din desvoltările şi întinderea acestor articole, se datoresc greutăţei inerente calculului determinanţilor finali.

Pentru a mai ilustra cele spuse voiu considera două din multele probleme ce se pot propune:

I. Date numerile:

$$a_0 = a, a_1 = a_0 + d, \ldots, a_n = a_{n-1} + d,$$

se cere suma:

$$s = p_0 a_0 + p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n,$$

în care $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sunt numere date.

Ecuaţiunea ce ne va da pe s, este:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & d \\ 0 & -1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & -1 & 1 \ldots & 0 & 0 & d \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 & d \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_{n-1} & p_n & s \end{vmatrix} = 0.$$

II. Date numerile:

$$a_0 = f(0), a_0 + a_1 = f(1), a_1 + a_2 = f(2) \ldots$$
$$a_{n-1} + a_n = f(n),$$

în care $f(n)$ e un polinom de gradul p, se cere expresia terminului general a_n; valoarea sumei primilor $n+1$ termini; valorile expresiilor:

$$E_{r,s} = a_{r+s} - \left(\frac{r}{1}\right) a_{r+s-1} + \left(\frac{r}{2}\right) a_{r+s-2} + \cdots \pm a_s$$

$$S = E_{r,0} + E_{r,1} + E_{r,2} + \cdots + E_{r,n},$$

în care r, s, n sunt daţi.

Rezolvirea acestei probleme nu intră în preocuparea mea, dar pentru a o obţine va fi un metod sigur, metodul explicat.

ASUPRA UNOR CERCURI

DE

CEZAR COSNITA

Să considerăm un triunghiu oarecare A B C în care să notăm ca de obiceiu:

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{CA} = b, \quad \overline{AB} = c.$$

Prin vârfurile B, C să ducem un cerc arbitrar (Γ_a), prin C, A alt cerc arbitrar (Γ_b), iar prin A, B un al treilea cerc arbitrar (Γ_c).

Ne propunem să găsim centrul radical al celor trei cercuri $(\Gamma_a), (\Gamma_b), (\Gamma_c)$.

Pentru aceasta ne vom folosi de coordonatele baricentrice în raport cu triunghiul de referinţă A B C.

Se ştie că ecuaţia unui cerc oarecare în coordonate baricentrice este:

$$a^2 y z + b^2 z x + c^2 x y = (x + y + z)(\mathrm{L}\, x + \mathrm{M}\, y + \mathrm{N}\, z),$$

unde L, M, N înseamnă puterile vârfurilor A, B, C faţă cu acest cerc.

Se găseşte atunci uşor că, ecuaţiile cercurilor $(\Gamma_a), (\Gamma_b), (\Gamma_c)$ sunt respectiv:

$$\begin{aligned} a^2 y z + b^2 z x + c^2 x y &= \mathrm{L}\, x (x + y + z), \\ a^2 y z + b^2 z x + c^2 x y &= \mathrm{M}\, y (x + y + z), \\ a^2 y z + b^2 z x + c^2 x y &= \mathrm{N}\, z (x + y + z), \end{aligned} \tag{1}$$

L, M, N însemnând aici puterile punctelor A, B, C faţă cu $(\Gamma_a), (\Gamma_b), (\Gamma_c)$.

Axele radicale ale celor trei cercuri luate câte două sunt:

$$\mathrm{M}\, y - \mathrm{N}\, z = 0, \quad \mathrm{N}\, z - \mathrm{L}\, x = 0, \quad \mathrm{L}\, x - \mathrm{M}\, y = 0,$$

deci centrul radical al celor trei cercuri, are drept coordonate baricentrice.

$$\frac{1}{\mathrm{L}}, \frac{1}{\mathrm{M}}, \frac{1}{\mathrm{N}}. \tag{2}$$

Condiţia ca aceste trei cercuri să fie concurente, se obţine scriind că punctul (2) verifică una din ecuaţiile (1). Se obţine următoarea condiţie necesară şi suficientă:

$$a^2 \mathrm{L} + b^2 \mathrm{M} + c^2 \mathrm{N} = \mathrm{M N} + \mathrm{N L} + \mathrm{L M}. \tag{3}$$

Să examinăm câteva cazuri particulare.

1°. Presupunem L = M = N, centrul radical are coordonatele baricentrice (1, 1, 1) deci este centrul de greutate al triunghiului A B C. Avem deci rezultatul:

Centrul radical al cercurilor cari trec prin câte două vârfuri ale triunghiului A B C *şi astfel ca puterile vârfurilor opuse în raport cu ele să fie egale, este centrul de greutate al triunghiului* A B C.

Puterea centrului de greutate faţă cu fiecare din aceste trei cercuri, se obţine făcând $x = y = z = \frac{1}{3}$, într'una din ecuaţiile (1). Se găseşte expresiunea:

$$\varrho = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3},$$

unde ϱ înseamnă puterea comună a vârfurilor triunghiului în raport cu cercurile respective. In particular, când $\varrho = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$, avem rezultatul:

Cercurile cari trec prin câte două vârfuri ale triunghiului şi astfel ca vârfurile opuse să aibă aceeaşi putere, egală cu $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$ *în raport cu ele, trec prin centrul de greutate al triunghiului.*

Aceste proprietăţi se extind în întregime la tetraedru.

2°. Pe latura A C să luăm punctul D astfel ca $\overline{AD} = \lambda c$, punctul A fiind cuprins între C şi D, λ este un număr pozitiv oarecare. Pe latura A B să luăm punctul E astfel ca $AE = \lambda b$, punctul A fiind cuprins între B, E.

Să mai luăm punctele D', E' simetricile punctelor D, E faţă de A şi să notăm cu $(\Gamma_{-\lambda bc})$, $(\Gamma_{\lambda bc})$ cercurile B C D E, B C D' E'.

In acelaş chip vom obţine cercurile:

$$(\Gamma_{-\lambda ca}), \quad (\Gamma_{\lambda ca}), \quad (\Gamma_{-\lambda ab}), \quad (\Gamma_{\lambda ab}).$$

Avem atunci următoarele rezultate:

Centrul radical al cercurilor; $(\Gamma_{-\lambda bc})$, $(\Gamma_{-\lambda ca})$, $(\Gamma_{-\lambda ab})$ *este centrul* I *al cercului înscris în triunghiul* A B C.

Centrul radical al cercurilor: $(\Gamma_{\lambda bc})$, $(\Gamma_{\lambda ca})$, $(\Gamma_{\lambda ab})$ *este tot punctul* I.

Centrele radicale ale grupurilor de cercuri:

$$\begin{array}{lll} (\Gamma_{-\lambda bc}), & (\Gamma_{\lambda ca}), & (\Gamma_{\lambda ab}) \\ (\Gamma_{\lambda bc}), & (\Gamma_{-\lambda ca}), & (\Gamma_{\lambda ab}) \\ (\Gamma_{\lambda bc}), & (\Gamma_{\lambda ca}), & (\Gamma_{-\lambda ab}), \end{array}$$

sunt respectiv centrele I_a, I_b, I_c *ale cercurilor exînscrise în triunghiul* A B C.

Centrele radicale ale grupurilor de cercuri:

$$(\Gamma_{\lambda bc}),\quad (\Gamma_{-\lambda ca}),\quad (\Gamma_{-\lambda ab})$$
$$(\Gamma_{-\lambda bc}),\quad (\Gamma_{\lambda ca}),\quad (\Gamma_{-\lambda ab})$$
$$(\Gamma_{-\lambda bc}),\quad (\Gamma_{-\lambda ca}),\quad (\Gamma_{\lambda ab}),$$

sunt respectiv I_a, I_b, I_c.

Toate aceste proprietăţi se verifică imediat ţinând seamă că punctele I, I_a, I_b, I_c au drept coordonate baricentrice respectiv:

$$(a, b, c),\ (-a, b, c),\ (a, -b, c),\ (a, b, -c).$$

In particular, când $\lambda = 1$, avem rezultatele:

Cercurile (Γ_{bc}), (Γ_{ca}), (Γ_{ab}) *trec prin* I.

Grupurile de cercuri:

$$(\Gamma_{bc}),\quad (\Gamma_{-ca}),\quad (\Gamma_{-ab})$$
$$(\Gamma_{-bc}),\quad (\Gamma_{ca}),\quad (\Gamma_{-ab})$$
$$(\Gamma_{-bc}),\quad (\Gamma_{-ca}),\quad (\Gamma_{ab}),$$

sunt concurente respectiv în I_a, I_b, I_c.

Aceste două proprietăţi din urmă se demonstrează având în vedere şi relaţia (3).

3°. Se împart laturile triunghiului A B C prin punctele A′, B′, C′ în acelaş raport k şi în acelaş sens de rotaţie:

$$(4)\qquad \frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} = \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} = \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = k.$$

Cercurile: B C B′, C A C′, A B A′ *au drept centru radical, primul punct al lui Brocard.*

Cercurile: B C C′, C A A′, A B B′, *au drept centru radical, al doilea punct al lui Brocard.*

Pentru demonstraţie, observăm relaţiile:

$$\overrightarrow{A'B} = a\frac{k}{1-k},\qquad \overrightarrow{A'C} = a\frac{1}{1-k};$$
$$\overrightarrow{B'C} = b\frac{k}{1-k},\qquad \overrightarrow{B'A} = b\frac{1}{1-k};$$
$$\overrightarrow{C'A} = c\frac{k}{1-k},\qquad \overrightarrow{C'B} = c\frac{1}{1-k},$$

cari se deduc imediat din relaţiile (4).

Rezultă că puterile punctelor A, B, C faţă de primele cercuri, sunt:

$$(5)\qquad \overrightarrow{AB'}\times\overrightarrow{AC} = b^2\frac{1}{1-k},\ \overrightarrow{BC'}\times\overrightarrow{BA} = c^2\frac{1}{1-k},$$
$$\overrightarrow{CA'}\times\overrightarrow{CB} = a^2\frac{1}{1-k},$$

produsele fiind produse obişnuite, nu vectoriale. (Presupunem că sensul direct de rotaţie este A B C).

Coordonatele centrului radical vor fi deci:

$$\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{a^2},$$

adică primul punct al lui *Brocard*.

In mod analog se demonstrează a doua proprietate.

In cazurile particulare: $k = 0$, $k = \infty$, avem, ţinând seama şi de relaţia (3), proprietăţile cunoscute:

Cercurile adjuncte: (B, C), (C, A), (A, B) *trec prin primul punct al lui Brocard.*

Cercurile adjuncte: (C, B), (B, A), (A, C) *trec prin al doilea punct al lui Brocard.*

NOTE MATEMATICE

14. — *Points-limites de Poncelet des cercles inscrit et circonscrit au triangle.*

1. Soient Y, Z les *cercles-points* du faisceau formé par les cercles (I), (O), de rayons r, R, inscrit et circonscrit à un triangle A B C, (B C = a, C A = b, A B = c).

Ces *points-limites* sont situés sur la droite I O des centres des cercles (I), (O).

Trois cercles (ω_1), (ω_2), (ω_3) faisant partie d'un même faisceau, on sait que les puissances P_2, P_3 d'un point M du cercle (ω_1), par exemple, relativement aux cercles (ω_2), (ω_3), sont dans un rapport constant:

$$(1)\qquad P_2 : P_3 = \overline{\omega_1\,\omega_2} : \overline{\omega_1\,\omega_3}.$$

Dès lors, lorsque $(\omega_1) \equiv$ (O), $(\omega_2) \equiv$ Y, $(\omega_3) \equiv$ (I), D, E, F étant les contacts du cercle (I) sur les côtés B C, C A, A B,

$$(2)\qquad \left(\frac{AY}{AE}\right)^2 = \left(\frac{OY}{OI}\right) = \left(\frac{BY}{BD}\right)^2 = \left(\frac{CY}{CF}\right)^2;$$

d'où :

$$(3)\qquad \frac{AY}{p-a}=\frac{BY}{p-b}=\frac{CY}{p-c}=\pm\sqrt{\frac{OY}{d}},$$

et, par analogie :

$$(4)\qquad \frac{AZ}{p-a}=\frac{BZ}{p-b}=\frac{CZ}{p-c}.$$

Les *points-limites* de *Poncelet* des cercles (O) et (I) sont donc les intersections des cercles lieux des points qui partagent les côtés B C, C A, A B du triangle dans les rapports :

$$BY : YC = (p-b) : (p-c),\ (p-c) : (p-a),$$
$$(p-a) : (p-b).$$

En vertu de (3) et (4), *l'axe radical Δ du faisceau* (O), (I), Y, Z, *médiatrice du segment rectiligne* Y Z, *est donc la newtonienne du quadrangle formé par la polaire trilinéaire du point de Gergonne du triangle fondamental avec les côtés de ce triangle.*

On a donc :

$$(5)\qquad OY.OZ=R^2,\quad IY.IZ=r^2,$$

et si X désigne le milieu du segment rectiligne Y Z,

$$(6)\qquad \overline{OX}^2-\overline{IX}^2=R^2-r^2.$$

En vertu de (5) :

$$IX=(R^2-d^2-r^2):2d,\quad OX=d+IX=$$
$$(7)\quad (R^2+d^2-r^2):2d,\quad YZ=\frac{r}{d}\sqrt{r(4R+r)},$$

et enfin :

$$IY=\frac{R^2-d^2-r^2-r\sqrt{r(4R+r)}}{2d}$$
$$(8)\qquad IZ=\frac{R^2-d^2-r^2+r\sqrt{r(4R+r)}}{2d},$$
$$OY=d+IY=\frac{R^2+d^2-r^2-r\sqrt{r(4R+r)}}{2d}.$$
$$(9)\quad OZ=\frac{R^2+d^2-r^2+r\sqrt{r(4R+r)}}{2d}.$$

2. Lorsque dans un triangle A B C :

$$p-a=p-b+p-c,\qquad 3a=b+c,$$

et les égalités (3), (4) donnent :

$$AY=BY+CY \text{ et } AZ=BZ+CZ.$$

Si les côtés d'un triangle A B C vérifient la relation :

$$(p-a)^2=(p-b)^2+(p-c)^2,$$

on a :

$$b^2+c^2-a^2=2p(b+c-a),$$

puis :

$$\cot A=(p-a):r=\cot\frac{1}{2}A,\ \text{soit } A=30^0.$$

Dans ce triangle spécial :

$$\overline{AY}^2=\overline{BY}^2+\overline{CY}^2 \text{ et } \overline{AZ}^2=\overline{BZ}^2+\overline{CZ}^2.$$

Enfin, lorsque les côtés d'un triangle A B C sont liés par la relation :

$$(p-a)^2=(p-b).(p-c),\ ^{1)}$$

on a :

$$a(b+c)=b^2+c^2,$$

puis :

$$\overline{AY}^2=BY.CY \text{ et } \overline{AZ}^2=BZ.CZ.$$

V. THÉBAULT
Le Mans (France)

15. — *Asupra unei teoreme a lui Manheim.*

In „R. M. T.", Vol. XIV, p. 45, d-l *Mihail Botez* regăseşte următoarea teoremă a lui *Manheim :*

Intr'un triunghiu dreptunghic, suma inverselor patratelor catetelor este egală cu inversul patratului înălţimei.

Iată, în rândurile de mai jos, cum se poate regăsi această teoremă, pe o cale mult mai simplă, desigur cunoscută.

Scriind relaţiunea :

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{BC}\times\overline{AD},$$

care exprimă că produsul catetelor unui triunghiu dreptunghic, este egal cu produsul ipotenuzei prin înălţime, deoarece fiecare din aceste produse reprezintă dublul ariei triunghiului. Ridicând ambii membri la patrat, avem :

$$\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2=\overline{BC}^2\times\overline{AD}^2,$$

---

1) *V. Thébault.* Nouvelles Annales des Mathématiques, 1915 — 462.

şi observăm că putem scrie:

$$\frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2},$$

aşa încât având în vedere clasica teoremă a lui *Pitagora*, conchidem:

$$\frac{1}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}{\overline{AB}^2 \times \overline{AC}^2} = \frac{1}{\overline{AB}^2} + \frac{1}{\overline{AC}^2},$$

adică tocmai relaţiunea care face obiectul teoremei lui *Manheim*.

G. G. CONSTANTINESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 1, Septembrie 1935. Lista Membrilor Societăţii „Gazeta Matematică". Membrii decedaţi. Patruzeci de ani dela întemeierea „Gazetei Matematice", de *G. Ţiţeica*. Prima aritmetică tipărită în limba română, de *I Ionescu*. Volumul şi centrul de greutate al calotei sferice, de *A. G. Ioachimescu*. Topologia elementară, de *Gh. Ţiţeica*. Limita razei cercului circumscris triunghiului format de trei tangente infinit vecine la o curbă plană, de *N. Abramescu*. Limita unor triunghiuri, de General *Gh. Buicliu*. Spectrul detentei de gaze la gura ţevilor de tun sau armă, de Maior *I. Linteş*. Asupra rădăcinelor ecuaţiilor în care coeficientul lui x^p are cel mai mare modul, de *Petre Sergescu*. Rezolvarea problemelor practice de matematici, de Ing. *I. I. Chiţulescu*. Divizibilitatea numerelor, de Lt-Comandor *Gr. Zapan*. O clasă de constante remarcabile, de *M. Ghermănescu*. Asupra problemei 1402, de *O. N. Ţino*. O proprietate a unei familii de traectorii, de *D. V. Ionescu*. Asupra unor integrale, de *Th. Angheluţă*. Asupra fascicolelor de cercuri, de *D. Barbelian*. Observaţie asupra ecuaţiilor algebrice având toate rădăcinele reale, de *Tiberiu Popoviciu*. O clasă specială de funcţiuni periodice, de *Miron Nicolescu*. Medii definite prin operaţia de mediaţie aritmetică asupra argumentelor unor funcţiuni, de *Nicolae Ciorănescu*. O generalizare a formulei lui *Leibnitz*, de *N. Botea*. Asupra funcţiunii lui *Bessel*, de *Gh. Th. Gheorghiu*. Asupra unor tetraedre, de *C. Ionescu-Bujor*. O teoremă relativă la patrulatere circumscriptibile, de *G. D. Simionescu*. Concursul „Gazetei Matematice" din 1935. Concursul „Gazetei Matematice" din 1936. Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „Gazetei Matematice".

2. *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*. (Bucureşti). Integralgeometrie 2, von *Wilhelm Blaschke*. L'équation intégrale linéaire à limites variables et à un paramètre, par *Nicolas Cioranescu*. Sur la representation des fonctions harmoniques, par *Alexandre Ghica*. Asupra proprietăţilor generale ale variabilelor statistice interdependente, de *G. Mihoc*. Sur l'unicité de la représentation des fonctions harmoniques d'ordre p, au moyen des fonctions harmoniques d'ordre un, par *Miron Nicolesco*.

3. *Boletin Matematico*, anul al VIII, No. 6, August 1935, Buenos Aires. Asupra ecuaţiilor diferenţiale de tip *Euler*, de *G. G. Constantinescu*. Originele studiului matematicilor în şcoalele argentine, de *J. M. Dovidio*. Identităţi obţinute prin derivare, de *B. I. Baidaff*.

4. *Gazeta Matematică, Supliment cu Exerciţii*, anul II, No. 1, Octomvrie 1935. Cuprinde exerciţii rezolvate şi propuse.

5. *Numerus*. Revistă de Matematici elementare pentru învăţământul secundar, normal, profesional şi militar; Director, *R. N. Racliş;* Vol. I, Caietul 3, Septembrie 1935.

6. *Ovidiu N. Ţino, Maria Ch. Theohari* şi *Vasile I. Bădulescu*. Lecţiuni de Aritmetică pentru cl. II-a a gimnaziilor şi liceelor de băeţi şi fete, a şcoalelor normale de băeţi şi fete şi a seminariilor teologice.

7. *Ovidiu N. Ţino, Maria Ch. Theohari* şi *Vasile I. Bădulescu*. Lecţiuni de Geometrie Plană, pentru cl. III-a a gimnaziilor şi liceelor de băeţi şi fete, a şcoalelor normale de băeţi şi fete şi a seminariilor teologice.

8. *Ovidiu N. Ţino, Maria Ch. Theohari* şi *Vasile I. Bădulescu*. Lecţiuni de Geometria în Spaţiu, pentru cl. IV-a a gimnaziilor şi liceelor de băeţi şi fete, a şcoalelor normale de băeţi şi fete şi a seminariilor teologice.

9. *N. Abramescu*. Astronomie pentru cl. VII-a.

10. *N. Abramescu*. Lecţiuni elementare de Algebră Superioară, pentru cl. VIII.

11. *Ion Dumitriu*. Culegere de Probleme de Geometrie Analitică.

12. *Maior I. Linteş*. Caracteristicile şi posibilităţile aviaţiei în legătură cu A. c. A. (Tipografia Şc. Of. Aviaţiei)

13. *Maior I. Linteş*. Noutăţi în construcţia gurilor de foc. (Timişoara, tipografia Şcoalei Ofiţeri de Artilerie, 1934).

14. *Maior I. Linteş*. Studiul teoretic al unui proectil. (Extras din Revista Artileriei).

15. *Maior I. Linteş*. Problema preciziunei gurilor de foc. (Extras din Revista Artileriei, No. 1—2, 1935).

PROBLEME REZOLVATE

481 [1]. — *Fie a b un număr format din numerele a şi b scrise unul după altul şi a_1 b_1 numărul ce se obţine sporind toate cifrele lui a b cu 1. Să se găsiască numărul $a_1 b_1$ mai mic ca 1000, ştiind că numărul numerelor prime cu el şi mai mici ca el este a b.*

G-L GH. BUICLIU

Fie în general N un număr întreg şi N_1 numărul ce se obţine din el sporindu-i toate cifrele cu 1. Dacă se înseamnă, ca de obicei, cu $\varphi(N_1)$ numărul numerilor prime cu N_1 şi mai mici ca el, atunci conform enunţului:

$$\varphi(N_1) = N$$

[1]) Anterior acestei probleme, a fost propusă o alta cu acelaşi număr 481 de către d-l *T. Stoicescu*. Redacţia găsind că problema d-lui *T. Stoicescu* e cunoscută, a anulat-o prin nota din josul paginei 190, Vol. V şi a înlocuit-o cu prezenta.

și ținând seamă de modul cum se obține N din N_1, avem:

$$N_1 - \varphi(N_1) = 11\ldots11.$$

Se cere să se găsiască numărul N_1 care verifică această relațiune, pentru $N_1 < 1000$. Avem deci de considerat următoarele 3 cazuri:

I. $N_1 < 10$; $N_1 - \varphi(N_1) = 1$

II. $10 \leqq N_1 < 100$; $N_1 - \varphi(N_1) = 11$

III. $100 \leqq N_1 < 1000$; $N_1 - \varphi(N_1) = 111$

Să însemnăm cu $x, y, z, \ldots$ factorii primi diferiți de 1 ai lui N_1. Avem:

$$N_1 = x^m \cdot y^n \cdot z^{p-1} \ldots$$

$$\varphi(N_1) = x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \ldots (x-1)(y-1)(z-1)\ldots$$

Cazul I. $N_1 < 10$, rezultă: a) $N_1 = x \times y$ sau b) $N_1 = x^n$, căci un număr de o cifră nu poate avea de cât cel mult 2 factori primi.

a) Trebue ca:

$$x \cdot y - (x-1)(y-1) = 1$$

$$x + y = 2$$

ceia ce este imposibil căci atât x cât și y sunt > 1.

b) Trebue ca:

$$x^n - x^{n-1}(x-1) = 1$$

$$x^{n-1} = 1 \qquad n - 1 = 0$$

dar atunci x este ori ce număr prim. Deci avem soluțiile:

$$2 - \varphi(2) = 3 - \varphi(3) = 5 - \varphi(5) = 7 - \varphi(7) = 1.$$

Cazul II. $10 \leqq N_1 < 100$. Observ că produsul primelor patru cele mai mici numere prime, $2\times3\times5\times7$, este $210 > 99$. Deci în cazul II numărul N_1 *are cel mult 3 factori primi;* adică nu putem avea de cât una din următoarele 3 posibilități:

a) $N_1 = x^m \cdot y^n z^p$; b) $N_1 = x^m \cdot y^n$; c) $N_1 = x^m$.

Să le examinăm pe rând pe fie-care.

a) $x^m \cdot y^n \cdot z^p - x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1}(x-1)(y-1)(z-1) = 11$

(1) $x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1}[xy + yz + zx - x - y - z + 1] = 11.$

De oare ce 11 este prim, unul din factorii lui (1) trebuie să fie egal cu 11, iar ceilalți trebuie să fie egali cu 1. Nu se poate lua produsul $x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot x^1$ egal cu 1, deci paranteza egală cu 11, căci atunci am avea:

$$m - 1 = n - 1 = p - 1 = 0$$

$$m = n = p = 2, \qquad N_1 = x^2 \times y^2 \times z^2$$

ori cel mai mic produs de această formă $2^2 \times 3^2 \times 5^2 > 100$. Deci nu se poate lua de cât:

$$x^{m-1} = 11 \qquad m = 2 \qquad \text{și} \qquad x = 11,$$

iar $n = p = 1$, adică:

$$N_1 = x^2 \times y \times z = 11^2 \times y \times z > 100,$$

ceia ce iar nu dă soluții.

b) $N_1 = x^m \cdot y^n$, deci:

$$x^{m-1} \cdot y^{n-1}(x + y - 1) = 11,$$

în care nu se poate că unul din factorii x, y să fie 11, căci atunci $N_1 > 100$. Deci singura posibilitate este:

(2) $$x + y - 1 = 11$$

$$x + y = 12,$$

care admite ca soluțiune numai grupul (5, 7) de numere prime și cum în cazul (2) rezultă neapărat $m = n = 1$, avem soluțiunea $N_1 = 5 \times 7 = 35$. In adevăr:

$$35 - \varphi(35) = 11.$$

c) Trebue să avem:

$$x^{m-1}[x - (x-1)] = 11,$$

care cere, $x^{m-1} = 11$ $m - 1 = 1$, $x = 11$ și:

$$N_1 = 11^2 = 121,$$

care este soluție a relației II, dar nu este soluție a problemei, pentru că $121 > 100$.

Cazul III. Se observă că $2\times3\times5\times7\times11 > 1000$, deci N_1 are cel mult 4 factori primi, așa că în cazul III sunt de examinat următoarele 4 posibilități:

a) $N_1 = x^m \cdot y^n \cdot z^p \cdot u^q$; b) $N_1 = x^m \cdot y^n \cdot z^p$

c) $N_1 = x^m \cdot y^n$; d) $N_1 = x^m$.

a) Vom avea:

(3) $$x^{m-1} \cdot y^{n-1} \cdot z^{p-1} \cdot u^{q-1} \times$$

$$[xyzu - (x-1)(y-1)(z-1)(u-1)] = 111 = 3\times37.$$

Observ mai întâi că în cazul a) de la III, unul din factorii x, y, z, u nu poate fi mai mare ca 31. In adevăr luând cele mai mici valori posibile pentru 3 din aceşti factori, al patrulea este determinat de condiţiunea:

$$2\times3\times5\times x < 1000 \qquad \overset{*}{**} \qquad x < 33, \ldots$$

Cu aceasta, să revenim la (2) în care însemnăm cu A produsul grupului de factori din afara parantezei şi cu B paranteza.

Egalitatea (3) atrage după sine următoarele patru posibilităţi de examinat:

$$1^0.\ \begin{matrix} A=111 \\ B=1 \end{matrix}\ ;\quad 2^0.\ \begin{matrix} A=3 \\ B=37 \end{matrix}\ ;\quad 3^0.\ \begin{matrix} A=37 \\ B=3 \end{matrix}\ ;$$

$$4^0.\ \begin{matrix} A=1 \\ B=111 \end{matrix}\ .$$

Prima din 1^0 şi din 3^0 cer neapărat ca unul din numerele x, y, z, u să fie egal cu 37, ceia ce nu se poate, de oare ce aceste numere sunt mai mici ca 33.

2^0. Dă:

$$x^{m-1}=3\,,\quad n-1=p-1=q-1=0.$$

$$\overset{*}{**} \qquad N_1=3^2\times y\,.\,z\,.\,u$$

şi deci:

$$A=3yzu-2(y-1)(z-1)(u-1)=37,$$

ceia-ce arată că nici unul din numerele y, z, u nu poate fi 2 şi fiind-că $x=3$, nici unul din acele numere nu poate fi nici 3. Dacă dăm acum la două din ele, cele mai mici valori posibile rămase, 5 şi 7, al treilea va fi determinat de condiţia:

$$3^2\times5\times7\times y<1000$$

$$\overset{*}{**} \qquad y<\frac{1000}{315}=3,\ldots$$

adică $y=2$ sau 3, ceia ce am văzut că nu se poate. Deci 2^0 nu dă soluţii.

4^0. Necesită:

$$m=n=p=q=1,$$

deci:

$$N_1=x\,.\,y\,.\,z\,.\,u$$

$$(8)\quad xyzu-(x-1)(y-1)(z-1)(u-1)=111.$$

Rămâne să rezolvăm ecuaţia (4) în numere întregi, prime, cu condiţia $x\,.\,y\,.\,z\,.\,u<1000$. Din cauza simetriei ecuaţiei, (4), se vede că dacă se are o valoare α pentru x de exemplu, nu se vor mai căuta valori egale sau mai mici ca α pentru celelalte numere. De asemeni se observă din (4), că nici unul din numerele x, y, z, u nu poate fi 2, căci atunci membrul întâi ar fi pereche, iar al doilea nepereche.

Dăm lui x în (4) valoarea 3 şi lui y pe rând valorile 5, 7, 11,... Pentru $x=3$, $y=5$ ecuaţia (4) devine:

$$8z+8u+7zu=119$$

$$\overset{*}{**} \qquad z=\frac{119-8u}{7u+8}\,,$$

ca z să fie întreg trebue ca $119-8u\geqq7u+8$, sau:

$$u\leqq\frac{111}{15}=7,\ldots$$

deci u este cel mult 7, ceia ce nu dă însă valoare întreagă pentru z.

Dând în (4) lui x şi y valorile 3, 7 şi procedând la fel, se găseşte:

$$u\leqq\frac{111}{21}=5,\ldots$$

care nu dă soluţie. Intrucât am examinat prin această ultimă încercare pe 5, care a mai fost examinat, conform unei observaţii precedente, nu se mai încearcă alte valori pentru x şi y.

Rezultă că nici 4^0 nu dă soluţie, deci *la a) de la cazul III nu avem soluţie.*

b) Vom avea de rezolvat ecuaţia:

$$x^{m-1}\,.\,y^{n-1}\,.\,z^{p-1}\,[xyz-(x-1)(y-1)(z-1)]=111.$$

Examinăm analog ca la a) de la III.

1^0. $A=111$; $\quad x^{m-1}\,.\,y^{n-1}\,.\,z^{p-1}=3\times37$

$$\overset{*}{**} \quad x=3,\quad y=37,\quad m=2,\quad n=2,\quad p=1.$$

Dar:

$$2^2\times37^2\times z>1000,$$

deci nu avem soluţie.

2^0. $A=3$; $B=37$, dă:

$$y\,.\,z\,[3yz-2(y-1)(z-1)]=37,$$

imposibil, căci ar trebui ca unul din factorii y, z să fie egal cu 1.

3°. $A=37$; $B=3$, dă $N_1=37^2\times y\times z>1000$.

4°. $B=111$, dă $N_1=xyz$ şi

(5) $$xy+yz+zx-x-y-z=110,$$

unde x, y, z nu pot fi perechi.

Făcând în (5) pe x egal cu 3, se găseşte:

$$y=\frac{113-2z}{z+2}=\frac{117-2(z+2)}{z+2},$$

$z+2$ trebuie să fie un divizor al lui 117 şi anume aşa ca:

$$113-2z\geq z+2 \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad z\leq 37.$$

Se găsesc valorile $z=7$ şi $z=11$, care dau $y=11$ şi $y=7$, deci soluţia:

$$N_1=3\times 7\times 11=231,$$

căci:

$$231-\varphi(231)=111.$$

Procedând aşa mai departe nu se mai găsesc soluţii.

c) $N_1=x^m.y^n$, conduce în condiţiile enunţului la:

(6) $$x^{m-1}.y^{n-1}(x+y-1)=111,$$

pe care examinând-o ca în cazurile precedente, conduce la:

$$x+y-1=111 \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad x+y=112.$$

Dând lui x pe rând valorile prime începând cu 3, se găsesc soluţiile:

$$x=3 \quad \text{şi} \quad x=5$$
$$y=109 \qquad\qquad y=107,$$

care dau pentru problemă:

$$N_1=327 \; ; \qquad N_1=535$$

cu:

$$\varphi(N_1)=216 \; ; \qquad \varphi(N_1)=424.$$

d) $N_1=x^m$ de unde:

$$x^{m-1}[x-(x-1)]=111,$$

care e imposibilă, căci 111 nu este număr prim, nici putere de număr prim.

In definitiv problema are următoarele 8 soluţiuni:

$$2-\varphi(2)=3-\varphi(3)=5-\varphi(5)=7-\varphi(7)=1$$
$$35-\varphi(35)=11$$
$$231-\varphi(231)=327-\varphi(327)=535-\varphi(535)=111.$$

D-l *Popescu N. Corneliu* (fost elev lic. Caracal) a dat exact toate soluţiile, fără a examina toate cazurile.

Iata şi o soluţie pentru $N_1>1000$:

$$3327-\varphi(3327)=1111$$

G-l Gh. B.

1320. — *O stropitoare automobilă trece pe stradă cu viteza $v=7$ Km/oră. Intâlnind un camion, opreşte stropitul, pentru al relua imediat după ce camionul a trecut. Măsurând locul rămas uscat, găsim 3,5m. Ştiind că lungimea camionului este de 8 m., să se afle viteza cu care el a trecut.*

C. C. TEODORESCU

Natural, presupunem că stropitoarea automobilă şi camionul, merg cu mişcare uniformă.

Dacă t este timpul în care stropitoarea automobilă cu viteza $v=7000$ m/oră parcurge ce-i 3.5 m., când ea este oprită să funcţioneze, avem:

(1) $$3.5=7000\,t.$$

In acelaşi timp t, camionul lung de 8 m. trece cu viteza v_1, deci trebuie să avem:

(2) $$8=v_1 t.$$

Impărţind relaţia (2) prin (1), avem:

$$\frac{8}{3.5}=\frac{v_1}{7000}.$$

De aci deducem:

$$v_1=\frac{7000\times 8}{3.5}=16000 \text{ m/oră},$$

scri:

$$v_1=16 \text{ km/oră}.$$

Aceasta este viteza camionului.

Soluţii date de d-nii: *Florescu Gh. H.* (Gorj), *Milu I. Nicolae* şi *Popoviciu Gavrilă*.

S'au primit multe soluţii greşite, în care s'a găsit $v_1=9$ Km/oră.

1324. — *Dans un triangle* B A C *rectangle en* A, *montrer que l'on a la relation:*

$$r_a^2=\frac{1}{2}(a+b)(a+c),$$

entre les côtés et le rayon du cercle exinscrit dans l'angle A.

V. THÉBAULT

In orice triunghiu B A C, avem relaţia cunoscută:

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

căci unghiul A fiind drept:

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$$

relaţie care devine în cazul nostru:

$$(1) \qquad r_a = p = \frac{a+b+c}{2},$$

Ţinând seamă că într'un triunghiu dreptunghiu B A C, avem:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

şi ridicând la patrat relaţia (1), putem scri succesiv:

$$r_a^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{4} =$$

$$\frac{2a^2+2ab+2bc+2ca}{4} = \frac{a(a+c)+b(a+c)}{2},$$

care se mai poate scri:

$$r_a^2 = \frac{1}{2}(a+b)(a+c).$$

Am găsit astfel tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Amăreşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Burghelea Stelian* (lic. Milit, Cernăuţi), *Cazanac i V. Petre* (lic. Chişinău), *Cehan G Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ciucă I. Ioan* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Cristea S. Emilian* (lic. Milit, Cernăuţi), *Deleanu Gheorghe* (lic Milit., Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Gh. Haraiambie* (Gorj), *Godeanu Ig Vasile* (Şc Milit., de Artilerie), *Grigorescu Vintilă* (lic. Milit., N. Filipescu), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit., N Filipescu), *Jarda Radu* (lic Milit, Tg-Mureş), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuţi), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. Nicolae* (lic Beiuş), *Milea G. E.* (Sub-Lt), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Mocanu Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Murgu Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Orăşanu Gh. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Pova Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc Polit, Timişoara), *Pupăzon V.* (Tg-Jiu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Rotaru Gh. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Şabac Gh. Ion* (lic. Milit., N. Filipescu), *Stănciulescu Gheorghe* (lic Milit., Cernăuţi), *Ştefănescu D Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Tica P. Marin-Gall*, *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit, N. Filipescu) şi *Vusatiuc D. Mihai* (lic. Milit, Cernăuţi).

1326. — *Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu* A B C *avem relaţia:*

$$\frac{b+c}{a\sqrt{2}} = \frac{h_a}{d_a},$$

unde a, b, c sunt laturile, iar h_a, d_a *respectiv înălţimea şi bisectoarea interioară unghiului A, atunci triunghiul este dreptunghiu.*

STEFAN MUSTA

Se cunosc relaţiile:

$$h_a = \frac{2s}{a}, \qquad d_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2},$$

(Compléments de Trigométrie, par F. G. M. pag. 193).

Inlocuind aceste valori în relaţiile din enunţ, avem:

$$\frac{b+c}{a\sqrt{2}} = \frac{s(b+c)}{abc\cos\frac{A}{2}},$$

şi simplificând avem:

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{s}{bc\cos\frac{A}{2}}.$$

Dar:

$$s = \frac{bc\sin A}{2},$$

astfel că (1) devine:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sin A}{2\cos\frac{A}{2}} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} = \sin\frac{A}{2}.$$

Având deci:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

rezultă:

$$\frac{A}{2} = 45^0,$$

sau:

$$A = 90^0.$$

Triunghiul A B C este astfel dreptunghiu.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrumachievici V.* (lic. Chişinău), *Apostol Radu* (lic. Milit., N. Filipescu), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Burghelea Stelian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli*

V. Petre (Chişinău), *Cehan G. Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cristea G. Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Grigorescu Vintilă* (lic. Milit., N. Filipescu), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Ofiţeri de Artilerie), *Ionescu D.* (lic Milit., N. Filipescu), *Lozinciu D. Ilie* (stud., Cluj), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuţi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milea G. E.* (Sub-Lt), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Pupăzăn C-tin* (Tg-Jiu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Stănciulescu Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tica P. Marin-Gall* şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1425. — Un număr întreg N_1 este format din patru cifre consecutive aşezate în ordine de mărime, cifra unităţ lor fiind cea mai mică. Dacă N_2 este numărul cu aceleaşi cifre scrise în ordine inversă, să se arate că numărul $3(N_1 - N_2)$ este un cub perfect pentru toate numerile N_1.

V. THÉBAULT

1426. — Să se găsească un număr de trei cifre patrat perfect, egal cu suma patratelor a două numere consecutive.

V. ALACI

1427. — In triunghiul ABC, fie A' piciorul bisectoarei vârfului A, A'' simetricul lui A' în raport cu mijlocul laturii BC, B', C' simetricele punctelor, în care cercul $AA'A''$ tae laturile AB, AC, în raport cu mijloacele acestor laturi.

Să se arate că avem relaţia:

$$(\overline{AB'} + \overline{AC'})(\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{BC}^2$$

C. IONESCU BUJOR

1428. — Prin vârfurile triunghiului ABC, se duc dreptele AA_1, BB_1, CC_1 limitate la laturile opuse şi făcând cu aceste laturi acelaşi unghiu φ. Să se demonstreze că dacă φ variază, centrele de greutate ale triunghiurilor AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 se mişcă pe trei drepte concurente. Să se găsească apoi locul centrului de greutate al triunghiului $A_1B_1C_1$.

G-L GH. BUICLIU

1429. — Se consideră ecuaţia de gradul al 2-lea:

$$x^2 + 2(a\lambda + b)x + c\lambda + d = 0,$$

unde a, b, c, d sunt numere date, iar λ este un parametru. Există două valori pentru λ şi anume λ_1 şi λ_2, pentru care ecuaţia dată are o singură rădăcină. Rădăcinele ecuaţiei date, cari corespund la λ_1 şi λ_2, se notează cu x_1 şi x_2.

Fără să se rezolve nici-o ecuaţie, să se formeze ecuaţia de gradul al 2-lea, care are ca rădăcini pe x_1 şi x_2.

D. V. IONESCU

1430. — Să se rezolve ecuaţia în x:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \ldots & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ d & -1 & 1 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & -1 & 1 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ldots & \cdot & \cdot & \cdot \\ d & 0 & 0 & 0 \ldots & -1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

fără a întrebuinţa egalitatea:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

şi fără a recurge la metoda inducţiei complecte

B. I. BAIDAFF

1431. — Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresia:

$$E = 2\cos^2 a \cos b - 2\cos^2 a - \cos^2 b + 1.$$

D-TRU M. SECARA

1432. — Să se arate că în orice triunghiu există relaţia:

$$\sum \frac{\cos(B - C)}{h_a} = \frac{2}{R},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

CEZAR IVANESCU

ERATĂ 1°. Problema rezolvată la pag. 78 din numărul trecut poartă numărul 557, iar nu 547.

Pentru rectificarea numerătorii problemelor propuse în N-l 5, Vol. VI, a se vedea erata de la pag. 94, Vol. VI.

2°. Rândul 6 de jos, pag. 78, coloana a doua, din numărul trecut al „R. M. T.", se va citi $N = 8$ în loc de No. 8.

3°. Rândul 11 de jos, pag. 78, coloana a doua din numărul trecut al „R. M. T." se va citi $x \pm y$ în loc de x şi y.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**.

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru :

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

PUBLICAŢIUNILE INSTITUTULUI MATEMATIC ROMAN

Director: prof. dr. Rodolphe RACLIŞ, Aleea Vulpache 21, Bucureşti 3, Telefon 22.444

AU APĂRUT PENTRU ANUL ŞCOLAR 1934—1935:

1° GEOMETRIE ANALITICĂ de *G. Ţiţeica*, ediţia 4-a, inclusiv chestiuni de examen. rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

2° ALGEBRĂ SUPERIOARĂ de *A. Angelescu*, ediţia 3-a, inclusiv probleme de Seminar, chestiuni de examen, rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

3° MATEMATICI ELEMENTARE şi GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *D. Barbilian*, ediţia 3-a, partea întâia, Algebră . . . . . 70 lei

4° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, cuprinde Dreapta, Planul, Conice, Cuadrice, cu exerciţii, probleme de seminar, şi chestiuni de examen; pentru studenţii dln Anul I, secţiile Matematică şi Fizico-chimice şi elevii din Anul preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

5° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *D. Pompeiu*, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . 50 lei

6° MECANICĂ, partea I, de *A. G. Ioachimescu*, ediţia 2-a, cu probleme, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 90 lei

7° CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, pentru elevii clasei VII secundară secţia ştiinţifică pentru elevii Liceelor Militare, pentru studenţii Anului I, secţiile Matematică. Electrotechnică şi Chimie Industrială, pentru elevii Anului Preparator de la Şcoalele Politechnice şi Academia de Arhitectură.

8. ELEMENTE DE CALCUL DIFERENŢIAL ŞI CALCUL INTEGRAL de *R. Racliş*, ediţia 2-a, cu exerciţii şi probleme de Seminar; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică, şi elevii din Anul I, Şcoalele Politechnice.

9° ANALIZA INFINITEZIMALĂ de *A. Davidoglu*, ediţia 4-a, cu exerciţii, probleme de seminar şi chestiuni de examen; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică . . . . . 240 lei

10° MECANICA RAŢIONALĂ, partea II, de *A. G. Ioachimescu*, cu chestiuni de examen, rezolvate; pentru elevii din anul I, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

11° REVISTA UNIVERSITARA MATEMATICA, journal rédigé par *Rodolphe Raclis*, pour les candidats à la Licence et les élèves des Grandes Ecoles, in 8° de VIII+256 pages; cuprinde chestiuni de examen rezolvate şi articole, note sau probleme semnate Tr. Lalescu, E. Picard, V. Volterra, G. Julia, G. Ţiţeica, D. Pompeiu, I. Ionescu, V. Vâlcovici, R. Racliş, H. Villat, D. Barbilian, N. Coculescu, E. Cahen, D. Emanuel, G. Filipescu, A. Ioachimescu, G. Nichifor, Sc. Panaitescu, C. Popovici, S. Sanielevici, G. Sudan, L. Teodoriu, V. Claudian Coşniţă, N. Botea, Ş. Ţiţeica, N. Teodorescu, I. Georgescu Racoviţă, C. Ionescu Bujor, G. Simionescu, T. Popoviciu, Caius Iacob, C. Drâmbă, G. Tailer, Tr. Lişcu, R. Woinarosky, etc. . . . . 140 lei

12° LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE par *Trajan Lalesco*, (pour paraître prochainement).

13° INTRODUCTION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES par *Trajan Lalesco*, 2-e édition (pour paraître prochainement).

14° SOLUTION PRINCIPALE DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES DE POINCARÉ par *Rodolphe Racliş*, édition des Presses Universitaires de France, Paris . . . . . 190 lei

15° ANNALES ROUMAINES DE MATHÉMATIQUES, journal publié par *Rodolphe Racliş* (pour paraître prochainement).

Publicaţiile Institutului Matematic Român se găsesc de vânzare la Librăria „Cartea Românească" Bulevardul Academiei 3, Bucureşti 1.

ANUL XV. 15 NOEMBRIE 1935 No. 9.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. MĂTIEȘ ȘI EUGEN VIȘA: RESTUL IMPĂRȚIRII NUMERELOR INTREGI.

2. NOTE MATEMATICE: 16, 17.

3. CHESTIUNI DE EXAMEN.

4. BIBLIOGRAFIE.

5. PROBLEME REZOLVATE: 1269. 1332, 1336, 1338, 1340 1344 1352. 1353, 1355.

6. PROBLEME PROPUSE: 1433-1440.

7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 8. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

RESTUL ÎMPĂRȚIRII NUMERELOR ÎNTREGI

DE

I. V. MĂTIEȘ și EUGEN VIȘA

PROFESORI, BLAJ.

Impărțind numărul întreg m cu n, obținem câtul c și restul r ($r=0$ fiind cazul împărțirii exacte), ceeace putem scrie sub una din formele:

$$m : n = c, \text{ rest } r\,; \quad \frac{m}{n} = c + \frac{r}{n}\,; \quad m = c\,n + r,$$

sau sub o formă ce nu cuprinde câtul c:

$$\boxed{\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right) = r} \tag{1}$$

care se citește: *Restul împărțirii lui m cu n este r.*

In cele ce urmează vom stabili câteva teoreme, cari au de scop să reducă domeniul de cercetare, când e vorba să căutăm restul împărțirii a două numere întregi. In stabilirea acelor teoreme vom utiliza mai ales relația (1).

Teorema 1-a. Dacă deîmpărțitul e de forma:

$$m = \Sigma\, m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_k,$$

atunci relația (1) se scrie:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\Sigma\, m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left[\frac{\Sigma\, \mathcal{R}\left(\frac{m_i}{n}\right)}{n}\right]. \tag{2}$$

In adevăr:

$$m_i = c_i\, n + r_i \qquad (r_i < n)$$

$$\Sigma\, m_i = n\, \Sigma\, c_i + \Sigma\, r_i$$

$$\frac{\Sigma\, m_i}{n} = \Sigma\, c_i + \frac{\Sigma\, r_i}{n}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\Sigma\, m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{\Sigma\, r_i}{n}\right)$$

c. c. d. t.

Teorema 2-a. Deîmpărțitul fiind de forma:

$$m = \Pi\, m_i = m_1 . m_2 \ldots m_k,$$

avem relația:

$$\mathcal{R}\left(\frac{\Pi\, m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left[\frac{\Pi\, \mathrm{R}\left(\frac{m_i}{n}\right)}{n}\right]. \tag{3}$$

Fie:

$$m_i = c_i\, n + r_i \qquad (r_i < n)$$

$$\Pi\, m_i = \Pi\,(c_i\, n + r_i) = \mathrm{C}\, n + \Pi\, r_i$$

$$\frac{\Pi\, m_i}{n} = \mathrm{C} + \frac{\Pi\, r_i}{n}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{\Pi\, m_i}{n}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{\Pi\, r_i}{n}\right)$$

c. c. d. t.

Teorema 3-a. Deîmpărțitul și împărțitorul fiind respectiv $m = k\,.\,m'$, $n = k\,.\,n'$ avem relația:

$$\mathcal{R}\left(\frac{k\,.\,m'}{k\,.\,n'}\right) = k\,.\,\mathcal{R}\left(\frac{m'}{n'}\right). \tag{4}$$

Relația este evidentă ținând seama de proprietatea înmulțirii prin k a termenilor unei împărțiri cu rest. (Câtul rămâne neschimbat, iar restul se mărește de k ori).

Teorema 4-a. Dacă deîmpărțitul îl putem scrie:

$$m = (a\, n + b)^p \qquad (b < n),$$

avem relația:

$$\mathcal{R}\left[\frac{(a\, n + b)^p}{n}\right] = \mathcal{R}\left(\frac{b^p}{n}\right), \tag{5}$$

căci:

$$(a\, n + b)^p = \mathrm{C}\, n + b^p$$

$$\frac{m}{n} = \mathrm{C} + \frac{b^p}{n}$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{b^p}{n}\right).$$

Obţinem relaţia ce trebuia demonstrată.

Teorema 5-a. Dacă m şi n sunt prime între ele, există în totdeauna cel puţin un număr $p\ (o < p < n)$ astfel încât să avem:

$$(6)\quad \mathcal{R}\left(\frac{m^p}{n}\right) = 1 \;\dot{*}\; \mathcal{R}\left(\frac{m^{kp+q}}{n}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{m^q}{n}\right), (q<p).$$

Premitem următoarea *observare:*

Resturile $\mathcal{R}\left(\frac{m^x}{n}\right)$ sunt prime faţă de n, oricare ar fi x întreg pozitiv.

Avem în adevăr:

$$m^x = c_x n + r_x$$

şi presupunând contrarul: $r_x = k \cdot r'_x$ şi $n = k \cdot n'$, am avea:

$$m^x = k \cdot (c_x n' + r'_x),$$

relaţie imposibilă în numere întregi, căci m şi puterile lui, sunt prime faţă de k (k fiind un factor al lui n).

Consecinţă. Numărul resturilor distincte e cel mult egal cu numărul numerelor subprime faţă de n.

Fie α, cea mai mică valoare, pentru care avem:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m^\alpha}{n}\right) = r_\alpha = \mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right) = r_1.$$

Putem scrie:

$$m = c n + r_1$$

$$\dot{*}\quad m^\alpha = c' n + r_1^\alpha$$

$$\dot{*}\quad r_1^\alpha = \text{Mult. } n + r_1$$

$$\dot{*}\quad (r_1^{\alpha-1} - 1) r_1 = \text{Mult. } n$$

$$\dot{*}\quad r_1^{\alpha-1} = \text{Mult. } n + 1 \quad (r_1 \text{ fiind prim cu } n)$$

$$\dot{*}\quad p = \alpha - 1$$

valoarea lui p ce voiam să o căutăm.

Pentru a demonstra şi relaţia:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m^{kp+q}}{n}\right) = \mathcal{R}\left(\frac{m^q}{n}\right), \qquad (q<p),$$

vom scrie:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m^{kp}\cdot m^q}{n}\right) = \mathcal{R}\left[\frac{\mathcal{R}\frac{(m^p)^k}{n}\cdot \mathcal{R}\left(\frac{m^q}{n}\right)}{n}\right] = \left(\frac{m^q}{n}\right)$$

c. c. e. d. d.

Observare 1°. In căutarea valorilor lui p, e suficient să cunoaştem aceste valori pentru numerele m prime absolute şi n prime cu m.

Fie:

$$m = \Pi\, m_i = m_1 \cdot m_2 \ldots m_k,$$

m_i factorii primi absoluţi ai lui m şi p_i minimi, pentru cari avem:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m_i^{p_i}}{n}\right) = 1.$$

Vrem să căutăm o valoare a lui p, pentru care să avem:

$$\mathcal{R}\left[\frac{(\Pi\, m_i)^p}{n}\right] = 1.$$

Observăm că:

$$p = \Pi\, p_i = p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$$

satisface cerinţa noastră, căci:

$$\mathcal{R}\left[\frac{\Pi\, m_i^p}{n}\right] = \mathcal{R}\left[\frac{\Pi\, \mathcal{R}\left(\frac{m_i^{p_i}}{n}\right)}{n}\right] = \mathcal{R}\left(\frac{1.1\ldots1}{n}\right) = 1.$$

Valoarea minimă a lui p va fi printre divizorii lui $\Pi\, p_i$.

Observarea 2°. A doua relaţie din (6) e generală, având loc pentru m şi n oricari. In toate cazurile p este perioada de repetare a resturilor.

Putem scrie: $m = m' \cdot \Pi\, \lambda_i$ şi $n = n' \cdot \Pi\, \lambda_i$, m' şi λ_i fiind primi faţă de n' precum şi:

$$\mathcal{R}\left[\frac{(m'\,\Pi\,\lambda_i)^{kp+q}}{n'\,\Pi\,\lambda_i}\right] = \Pi\,\lambda_i\, \mathcal{R}\left[\frac{(m')^{kp+q}(\Pi\,\lambda_i)^{kp+q-1}}{n'}\right].$$

In baza observării precedente, p fiind perioada de repetare a resturilor, putem scrie:

$$\mathcal{R}\left[\frac{(m'\,\Pi\,\lambda_i)^{kp+q}}{n'\,\Pi\,\lambda_i}\right] = \Pi\,\lambda_i\, \mathcal{R}\left[\frac{m'^q(\Pi\,\lambda_i)^{q-1}}{n'}\right] =$$

$$\mathcal{R}\left[\frac{m^2(\Pi\,\lambda_i)^q}{n}\right]$$

şi formula e demonstrată.

Indicaţiuni pentru calculul lui p.

Ne propunem acum să căutăm valoarea minimă a lui p, pentru care să avem:

$$\mathcal{R}\left(\frac{17^p}{22}\right)=1.$$

Vom avea succesiv:

$$\mathcal{R}\left(\frac{17}{22}\right)=17 \quad \text{sau} \quad -5$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{17^2}{22}\right)=\mathcal{R}\left[\frac{(-5)^2}{22}\right]=3$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{17^3}{22}\right)=\mathcal{R}\left[\frac{(-5).(3)}{22}\right]=-15, \text{ sau } 7$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{17^4}{22}\right)=\mathcal{R}\left(\frac{3^2}{22}\right)=9$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{17^5}{22}\right)=\mathcal{R}\left[\frac{\mathcal{R}\left(\frac{17^2}{22}\right)\mathcal{R}\left(\frac{17^3}{22}\right)}{22}\right]=$$

$$\mathcal{R}\left(\frac{3.7}{22}\right)=21, \text{ sau } -1.$$

Pentru celelalte puteri până la a zecea, resturile se repetă, dar cu semn contrar şi:

$$\mathcal{R}\left(\frac{17^{10}}{22}\right)=(-1)^2=1.$$

Deci $p=10$.

Dăm mai jos valorile minime ale lui p, pentru care:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m^p}{n}\right)=1,$$

după valorile lui m prime absolute sub *50* şi n subprim faţă de m.

m/n	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
1	—															
2	1	—														
3	1	2	—													
4	1	—	2													
5	1	4	4	—												
6	1	—	—	2												
7	1	3	6	6	—											
8	1	—	2	2	2											
9	1	6	—	6	3											
10	1	—	4	—	4											
11	1	10	5	5	10	—										
12	1	—	—	2	2	2										
13	1	12	3	4	12	12	—									
14	1	—	6	6	—	3	2									
15	1	4	—	—	4	2	4									
16	1	—	4	4	2	4	4									
17	1	8	16	16	16	16	4	—								
18	1	—	—	6	3	6	3	2								
19	1	18	18	9	3	3	18	9	—							
20	1	—	4	—	4	2	4	4	2							
21	1	6	—	6	—	6	2	6	6							
22	1	—	5	5	10	—	10	10	10							
23	1	11	11	22	22	22	11	22	22	—						
24	1	—	—	2	2	2	2	2	2	2						
25	1	20	20	—	4	5	20	20	10	20						

m/n	1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
26	1	—	3	4	12	12	—	6	12	6						
27	1	18	—	18	9	18	9	6	3	18						
28	1	—	6	6	—	6	2	6	6	6						
29	1	28	28	14	7	28	14	4	28	7						
30	1	—	—	—	4	2	4	4	2	4	2					
31	1	5	30	3	15	30	30	30	15	10	10	—				
32	1	—	8	8	4	8	8	2	8	4	8	2				
33	1	10	—	10	10	—	10	10	10	2	10	5				
34	1	—	16	16	16	16	4	—	8	16	16	16				
35	1	12	12	—	—	3	4	12	6	12	2	6				
36	1	—	—	6	6	6	3	2	2	6	6	6				
37	1	36	18	36	9	6	36	36	36	12	12	4	—			
38	1	—	18	18	3	3	18	18	—	9	18	6	2			
39	1	12	—	4	12	12	—	6	12	6	6	4	12			
40	1	—	4	—	4	2	4	4	2	4	2	2	4			
41	1	20	8	20	40	40	40	40	40	10	40	10	5	—		
42	1	—	—	6	—	6	2	6	6	6	2	6	3	2		
43	1	14	42	42	6	7	21	21	42	21	42	21	6	7	—	
44	1	—	10	5	10	—	10	10	10	2	10	10	5	10	2	
45	1	12	—	—	12	6	12	4	2	12	6	3	4	6	12	
46	1	—	11	22	22	22	11	22	22	—	11	11	22	11	22	
47	1	23	23	46	23	46	46	23	46	23	46	46	23	23	46	—
48	1	—	—	4	2	4	4	2	4	2	4	2	4	2	4	2
49	1	21	42	42	—	21	14	42	6	21	7	6	21	14	7	42
50	1	—	20	—	4	5	20	20	10	20	10	5	20	10	4	20

Acest tablou poate fi utilizat cu folos în căutarea de resturi la o împărţire neexactă şi la probleme de divizibilitate. Din el se mai pot deduce o mulţime de proprietăţi în legătură cu împărţirea celor două numere întregi.

Notă. Unele teoreme şi proprietăţi din acest

articol sunt cunoscute, dar enunțate sub altă formă.

In acest domeniu se pot consulta cu folos printre altele și articolele *„Asupra resturilor diviziunii unui număr de forma* A^m *printr'un număr dat p“* de *A. G. Ioachimescu,* publicate în *„Gazeta Matematică“,* Vol. V, pag. 5, 37, 62, precum și articolul *„Divizibilitatea expresiunilor de forma:*

$$\Sigma\, a A^{\alpha x+\alpha'} . b B^{\beta x+\beta'} \ldots .“$$

de *I. Ionescu,* publicat în aceeași, Vol. VII, pag. 269.

NOTE MATEMATICE

16. — *Sur des carrés curieux.*

Avec les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris une fois, on peut former *deux* nombres de *cinq* chiffres tels que leurs carrés s'écrivent avec dix chiffres *tous* différents. Nous avons donné une liste des carrés de dix chiffres différents, (*Mathésis,* 1934, Supplément).

Parmi ces carrés, voici ceux dont les racines sont de la forme envisagée.

$35172^2 = 1237069584$ et $60984^2 = 3719048256$

$57321^2 = 3285697041$ et $60984^2 = 3719048256$

$58413^2 = 3412078569$ et $96702^2 = 9351276804$

$59403^2 = 3528716409$ et $76182^2 = 5803697124$

Les nombres 35172 et 57321 sont composés des mêmes chiffres.

V. THÉBAULT

17, — *Rectangle et parallélipipède rectangle.*

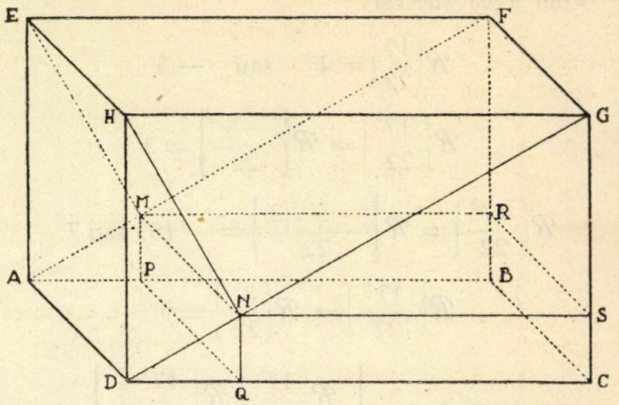
Voici, pour les jeunes lecteurs, quelques remarques sur le rectangle qui ont leurs analogues dans le parallélipipède.

1. Si l'on projette orthogonalement le sommet B d'un rectangle ABCD sur la diagonale AC, puis que l'on forme le rectangle EFDG, on obtient facilement ces relations connues:[1]

$$(1)\quad \overline{BC}^3 : \overline{BA}^3 = EF : EG,\quad \overline{BE}^3 = AC.EF.EG,$$
$$\overline{EF}^2 + \overline{EG}^2 + 3\overline{BE}^2 = \overline{AC}^2.$$

[1]) Voir, par exemple, *Journal de Vuibert,* III, p. 86.

2. Le plan, mené par l'arête GH, perpendiculairement au plan diagonal AFGD d'un parallélipipède rectangle ABCDEFGH, coupe ce dernier plan suivant une droite MN. Si l'on construit le parallélipipède BCQPNMRS, on a ces relations d'aires, analogues à (1):



$$\overline{EFGH}^3 : \overline{AEHD}^3 = MRSN : PMNQ$$

$$(2)\quad \overline{MEHN}^3 = AFGD.MRSN.PMNQ$$

$$\overline{MRSN}^2 + \overline{PMNQ}^2 + 3\overline{MEHN}^2 = \overline{AFGD}^2$$

3. Les propriétés du triangle rectangle peuvent être étendues au prisme droit AEFDHG. Ainsi, on a les relations d'aires:

$$\overline{NMEH}^2 = AMND.MFGN,$$

$$(3)\quad \overline{AEHD}^2 = AMND.AFGD,$$

$$\overline{EFGH}^2 = MFGN.AFGD,$$

d'où:

$$(4)\quad \overline{AEHD}^2 + \overline{EFGH}^2 = AFGD.(AMND + MFGN) = \overline{AFGD}^2.$$

Cette dernière relation est l'analogue du théorême de *Pythagore.*

Enfin, si l'on borde les faces rectangulaires du prisme AEFDHG de parallélipipèdes quelconques dont les hauteurs sont proportionnelles aux aires des faces AEHD, EFGH, AFGD, et que V_1, V_2, V_3 désignent les volumes de ces parallélipipèdes, on obtient, en vertu de (4), cette autre extension du théorème de *Pythagore*:

$$V_1 + V_2 = V_3.$$

V. THÉBAULT

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

CHESTIUNI DE EXAMEN ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA.

Examen de intrare în anul pregătitor Octomvrie 1935.

GEOMETRIE.

Chestiunea dată, se găseşte în acest număr, ca problemă propusă, având Nr. 1478.

(22 Octomvrie, 8½—11½)

ALGEBRA ŞI TRIGOMETRIE.

I.

Prima chestiune se găseşte ca problemă propusă în acest număr, având Nr. 1440.

II.

Să se determine a, b, c astfel ca să avem următoarea identitate:

$$\frac{x+a}{(x-2)^2}-\frac{x+b}{x^2-4}+\frac{x+c}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2},$$

şi în urmă să se verifice identitatea obţinută.

III.

In triunghiul A B C se unesc punctele D şi E mijloacele laturilor A B şi A C, apoi se duce D F perpendiculară pe B C.

Cunoscând:

$DE = 10$ cm., $DF = 5$ cm., $\sphericalangle B = 30^0$,

se cere să se rezolve triunghiul.

(22 Octomvrie, 3½—6½).

ARITMETICA.

I.

Prima chestiune se găseşte în acest număr, ca problemă propusă, având Nr. 1433.

II.

Să se demonstreze că dacă un număr A este divizibil separat prin două numere a şi b, prime între ele, atunci este divizibil şi prin produsul lor.

Dar dacă a şi b nu sunt prime între ele?

(23 Octomvrie, 8½—11½.)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 2, Octomvrie 1935. Sur les brocardiens d'un point du plan d'un triangle, par *V. Thébault*. Curbura lui *Bacaloglu*, de *A. Myller*. O soluţie geometrică şi o generalizare a problemei 1386, de General *Gh. I. Popescu*. Asupra unor însumări, de Maior *I. Linteş*. Programa analitică hotărâtă pentru concursul „Gazetei Matematice" din anul 1936. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului „General *Sc. Panaitescu*", pe anul 1934—1935, de *Ioan Buşilă*, Maior *I. Linteş*, Lt. Comandor-Inginer *Gr. Zapan*.

2. *Boletin Matematico*, anul al VIII, No. 7, Septemvrie 1935, *Buenos Aires*. Asupra conjugatelor comune a două involuţii, de *E. A. De Cesare*. Originele studiului matematicilor în şcoalele argentiniene, de *J. M. Dovidio*.

3. *Ştiinţă şi Progres*, anul II, No. 5, Octomvrie 1935. Liceele militare, de Maior *Panaite Jugănaru*. O proprietate a elipsei şi a iperbolei, de *D. V. Ionescu*. Progresiuni aritmetico-geometrice, de Prof. *I. V. Mătieş*. Lupta paraziţilor contra paraziţilor, de elev *Cotescu Constantin*.

4. *Gazeta Matematică*, supliment cu exerciţii, anul II, No. 2, Noemvrie 1935. Concursul „Gazetei Matematice" din 1936.

5. *Al. Th. Popesco*. Note sur l'article de *M. E. Abason*. Sur la méthode de *Thomson* et la méthode des discontinuités pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques. (Extrait du Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, de l'École Polytechnique, „Roi Carol II", Bucarest, V-ème année (1933—1934), No. 2—3 Fasc. 14—15).

6. *Al. Manicatide—N. Abramescu*. Algebra, pentru cl IV-a a liceelor, Şcoli normale şi Seminarii.

7. *N. Manicatide—N. Abramescu*. Algebra, pentru clasa V-a a liceelor, Şcoli normale, Seminarii.

8. *N. Abramescu*. Algebra financiară. cl. 6-a.

9. *N. Abramescu*. Algebra Superioară, clasa 7-a secţia Ştiinţifică.

11. *N. Abramescu*. Mecanica, cl. 8-a.

PROBLEME REZOLVATE

1269. — *Să se determine o ecuaţie de gradul al 2-lea cu rădăcinele x_1 şi x_2, ştiind că:*

$$x_1 - x_2 = a, \qquad x_1^2 - x_2^2 = b.$$

Să se studieze natura şi semnul rădăcinelor.

I. V. MATIES

Ne trebuie suma şi produsul rădăcinelor. Avem, observând relaţiile date:

$$x_1 + x_2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{b}{a},$$

$$x_1 x_2 = \frac{(x_1+x_2)^2 - (x_1-x_2)^2}{4} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - a^2}{4} = \frac{b^2 - a^4}{4a^2},$$

deci ecuaţia cerută este:

$$x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - a^4}{4a^2} = 0,$$

care rezolvată ne dă:

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - a^4}{4a^2}} = \frac{b}{2a} \pm \frac{a}{2} = \frac{b \pm a^2}{2a},$$

Rezultă:

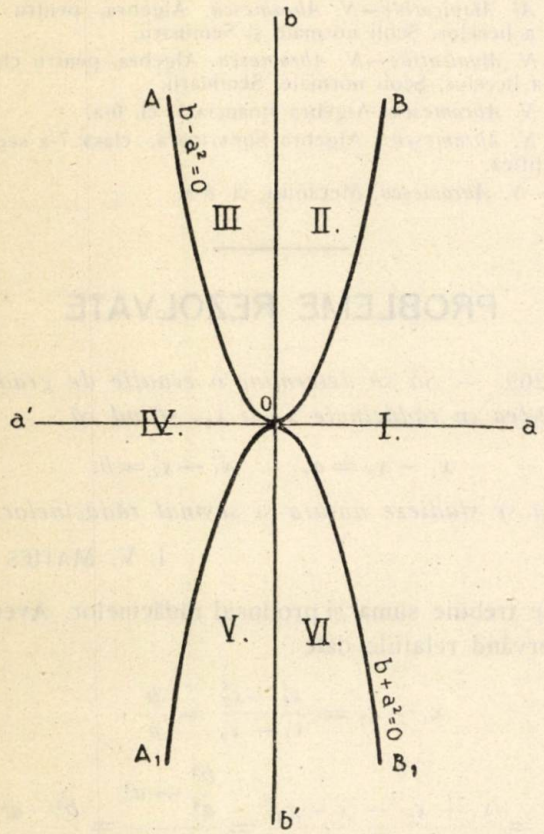
$$x_1 = \frac{b + a^2}{2a}, \qquad x_2 = \frac{b - a^2}{2a}.$$

Dacă a şi b sunt reali, rădăcinele sunt reale; iar dacă a sau b sunt imaginari, atunci rădăcinele sunt imaginare.

Acum să studiem semnul rădăcinelor x_1, x_2, care este dat evident de acel al produselor:

$$a(b+a^2), \qquad a(b-a^2).$$

Pentru aceasta luăm un sistem de axe rectangulare $a\,O\,b$ şi construim dreapta $a=0$, precum şi parabolele $b+a^2=0$, $b-a^2=0$, care impart planul în 6 regiuni.



Presupunem acum un punct M de coordonate (a, b), şi să cercetăm semnele lui x_1, x_2, după cum M este în una din cele 6 regiuni. Rezumăm concluzia în tabloul alăturat.

	I	II	III	IV	V	VI
x_1	+	+	−	−	+	−
x_2	−	+	−	+	+	−

Din acest tablou deducem, că dăcă punctul M se află în interiorul uneia din parabole, rădăcinele x_1, x_2 sunt ambele de acelaşi semn, iar dacă M este în afara acestor parabole, atunci x_1, x_2 au semne contrare.

La aceste rezultate mai adaogăm următoarele:

Dacă punctul M se află pe axa $b\,b'$, atunci $x_1 = x_3 = 0$.

Dacă punctul M se află pe parabola, $b+a^2=0$, atunci $x_1=0$, iar x_2 are semnul — sau +, după cum M este pe arcul O B, sau O A_1.

Dacă punctul M se află pe parabola $b-a^2=0$, atunci $x_2=0$, iar x_1 are semnul + sau —, după cum M se află pe arcul O B sau O A.

Au determinat ecuaţia de gradul al 2-lea şi natura rădăcinelor, fară a face un studiu mai amănunţit asupra semnului rădăcinilor, d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Amărică Tibul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Apostol Valerian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Birek Vas'le* (lic. Beiuş), *Budeanu C-tin* (Şc. Po'it, Bucureşti), *Cazanacli P.* (Iaşi), *Cărjă I. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Căşoeanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac I. C-tin* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Cornescu Milică* (lic. Milit, Cernăuţi), *Czervesz I.* (lic. Beiuş), *Ferenz Tiberiu* (lic. Loga, Timişoara), *Florea C. Teodor* (lic. Milit., Cernăuţi), *Galan I Ioan* (lic. Milit, Cernăuţi), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Grumăzescu I. Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Haret I. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Hompola Tiberiu* (lic. Beiuş), *Iliescu B. D-tru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Marandici Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Mărgărint Gh.* (lic. Milit, Cernăuţi), *Manea Desideriu* (lic. Beiuş), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Murgu M.* (lic Beiuş), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila), *Nicoară D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu Greaca-Vad* (lic Milit., Cernăuţi), *Popescu Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popleşeanu Gh. Ion*, *Postelnicescu Mircea* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit., Timişoara), *Şegărceanu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Serbănescu A. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stoica P. Ioan* (lic. Milit., Cernăuţi), *Strobel Rolf* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tanasiciuc* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tica P. Marin-Gal*, *Trăsnitu Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Vasilescu. A. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuţi), *Vasilescu Nicolae-Jiu*, *Vasiliu A. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

1332. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z+xyz=24 \\ xy+yz+zx=23 \\ x^2yz+xy^2z+xyz^2+x+y+z=144 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

Ecuaţia 3-a se poate scri:

$$(1) \qquad (x+y+z)(xyz+1)=144$$

şi ţinând seamă de prima, (1) devine:

$$(24-xyz)(xyz+1)=144,$$

sau:

$$(x\,y\,z)^2 - 23\,(x\,y\,z) + 120 - 0.$$

Rezolvind această ecuația de gradul al 2-lea în $x\,y\,z$, avem:

$$x\,y\,z = \frac{23 \pm \sqrt{529 - 480}}{2} = \frac{23 + 7}{2},$$

adică:

$$x\,y\,z = 15 \qquad \text{și} \qquad x\,y\,z = 8.$$

Sistemul dat este deci echivalent cu următoarele sisteme de ecuații:

$$(2)\qquad \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x\,y + y\,z + z\,z = 23 \\ x\,y\,z = 15 \end{cases}$$

și:

$$(3)\qquad \begin{cases} x + y + z = 16 \\ x\,y + y\,z + z\,x = 23 \\ x\,y\,z = 8 \end{cases}$$

Ecuațiile din aceste sisteme ne dau respectiv, suma lui x, y, z, suma produselor lor câte două și produsul lor, rezultă că x, y, z sunt rădăcinele ecuațiilor de gradul al 3-lea:

$$(2')\qquad t^3 - 9\,t^2 + 23\,t - 15 = 0$$

$$(3')\qquad t^3 - 16\,t^2 + 23\,t - 8 = 0.$$

Înlocuind pe t din ecuația (2') prin 1, 3, 5 divizori a-i lui 15, vedem că primul său membru se anulează, deci el se divide prin produsul $(t-1)\,(t-3)\,(t-5)$ și (2') se mai poate scri:

$$(t-1)\,(t-3)\,(t-5) = 0.$$

Rădăcinele sistemului (2), urmează că sunt:

x	1	1	3	3	5	5
y	3	5	1	5	1	3
z	5	3	5	1	3	1

Ecuația (3') se descompune și ea astfel:

$$(3'')\qquad (t-1)\,(t^2 - 15\,t + 8) = 0.$$

De aci obținem pentru x, y, z, sistemul de soluții:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = \dfrac{15 + \sqrt{193}}{2} \\ z = \dfrac{15 - \sqrt{193}}{2}, \end{cases}$$

și încă alte 5 sisteme de soluții, deduse din acesta, prin permutări circulare între x, y, z.

Au găsit toate sistemele de soluții, d-ra: *Savin Maria* (lic. Oltea Doamnă, Iași) și d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzești, Craiova), *Bacârea Alexandru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iași), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huși), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Enăşescu D. Victor* (lic. Milit., Iași), *Florescu Haralambie* (Gorj), *Grigorescu Vintilă* (lic. Milit, N. Filipescu), *Grumăzescu Mircea* (Șc. Of. de Art.), *Hompola I. T.* (lic. Beiuș), *Lupescu G. Corneliu* (Șc. Pregăt. de Ofițeri), *Marnea Desideriu* (lic. Beiuș), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuș), *Millea G. E.* (Sub-Lt.), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Murgu M.* (lic. Beiuș), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Panait Mircea* (Șc. Ofițeri de Artilerie), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuș), *Predoescu I. Marin* (Șc. Polit., Timișoara). *Săvulescu Spirea*, *Stefănescu Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș) și *Țițeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

Au găsit numai sistemele de soluții întregi, d-ra: *Popescu Maria* (studentă, București) și d-nii: *Apostol Gh. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuți), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Godeanu Ig. Vasile* (Șc. Milit., de Artilerie), *Lazăr Aurel* (lic. Milit., Cernăuți), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuți), *Mareș D. Petre* (lic. Milit., Cernăuți), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Maşcas Petru* (Șc. Polit., Timișoara), *Nedelcu Nicolaie* (lic. Milit., Cernăuți), *Opran C-tin Robăneşti* (lic., Milit, Cernăuți), *Paraschivescu M.* (lic. Milit., Cernăuți), *Popa C. Benone* (lic. Milit, Cernăuți), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Stănciulescu Gh.* (lic. Milit., Cernăuți) și *Tănăsiuc V. Claudius* (lic. Milit, Cernăuți).

1336. — *Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu dreptunghiu, se cere să se determine expresiunea trigonometrică t, în funcție de unghiurile triunghiului, astfel ca să avem:*

$$a\,(a + c) = 2\,p^2\,t$$

V. ALACI

Ținând seamă de relația:

$$2\,p = a + b + c$$

și de faptul că într'un triunghiu dreptunghiu:

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

relația din enunț se poate scri:

$$2\,a\,(a + c) = (a + b + c)^2\,t =$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 2\,a\,b + 2\,b\,c + 2\,c\,a)\,t,$$

sau:

$$2a(a+c) = (2a^2 + 2ab + 2bc + 2ca)t.$$

Simplificând cu 2, observăm că mai putem scri:

$$a(a+c) = [a(a+c) + b(a+c)]t = (a+c)(a+b)t.$$

De aci deducem:

$$t = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+a\cos C} = \frac{1}{1+\cos C},$$

deci:

$$t = \frac{1}{2\cos^2\frac{C}{2}}.$$

Soluții date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Cazanacli V. Petre* (lic. Chişinău), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit., de Artilerie), *Grigorescu A. Vintilă* (lic. Milit., N. Filipescu), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuți), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Murgu V. Marțian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Opran C. Robăneşti* (lic. Milit., Cernăuți), *Pova Nicolae* (lic. Beiuş), *Remert Berthold* (Şc. de Conductori Architecți), *Roman Nicolae* (lic. Milit, Cernăuți), *Ştefănescu D Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), şi *Țiţeica I. Ilie* (lic. Milit, N. Filipescu).

1338. — *Numărul elevilor din anul al 2-lea al unei şcoli este* $\frac{5}{6}$ *din al celor din anul întâi. La sfârşitul anului, trec din anul întâi in anul al 2-lea* $\frac{7}{8}$ *din elevi, iar în anul al 2-lea rămân repetenți* $\frac{1}{8}$. *La începutul anului următor, se retrag din anul al 2-lea 14 elevi, dar vin de la alte şcoli* $\frac{3}{20}$ *din câți mai rămăseseră, astfel că în anul al 2-lea se găsesc acum 92 elevi. Câți elevi erau, în anul şcolar trecut, în anul întâi şi câți in anul al 2-lea ?*

MIHAIL GHERMANESCU

Soluție aritmetică. Numărul elevilor din anul al 2-lea este $\frac{5}{6}$ din al celor din primul an. Rămânând repetenți în anul al 2-lea $\frac{1}{8}$ din câți au fost, asta valorează:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{48},$$

din numărul elevilor din primul an.

Trecând în anul al 2-lea $\frac{7}{8}$ din numărul celor din primul an, vom avea în al 2-lea an:

$$\frac{7}{8} + \frac{5}{48} = \frac{42+5}{48} = \frac{47}{48},$$

din numărul celor foşti în primul an.

Din acestia retrăgânduse 14 elevi, rămân: $N = \frac{47}{48}$, din numărul celor foşti în primul an, -14.

La acestia se adaogă $\frac{3}{20}$ din numărul lor, adică $\frac{3}{20}N$, astfel că vor fi:

$$N + \frac{3}{20}N = \frac{23}{20}N,$$

cari conform enunțului fac 92 elevi.

Deci dacă:

$$\frac{23}{20}N, \quad \text{fac } 92 \text{ elevi},$$

atunci:

$$N, \text{ face } 92 : \frac{23}{20} = \frac{92 \times 20}{23} = 80 \text{ elevi}.$$

Acești 80 elevi, sunt elevii din anul al 2-lea a anului următor, afară de cei noi veniți, la care adăogând 14, avem $80 + 14 = 94$, care inseamnă numărul elevilor din anul al 2-lea a anului următor, proveniți din cei trecuți din primul an şi cei repetenți în anul al 2-lea, care am văzut că face $\frac{47}{48}$ din numărul celor foşti în primul an.

Dacă:

$$\frac{47}{48}, \text{ fac } 94 \text{ elevi},$$

atunci:

$$\frac{48}{48}, \text{ fac } 94 : \frac{47}{48} = \frac{94 \times 48}{47} = 96 \text{ elevi},$$

foşti în primul an.

Cum în anul al 2-lea au fost $\frac{5}{6}$ din cei din primul an, inseamnă că au fost:

$$\frac{5}{6} \times 96 = 80 \text{ elevi}.$$

Astfel, în primul an şcolar au fost 96 elevi în primul an şi 80 elevi în anul al 2-lea.

Soluții date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău). *Dragomirescu Ilie* (lic. Milit., Craiova), *Florescu Gh. H.* (lic. Milit, Chişinău) şi *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş).

Soluție algebrică. Fie x numărul elevilor primului an, atunci în anul al 2-lea au fost:

$$\frac{5}{6}x.$$

In anul următor au fost în anul al 2-lea, conform enunțului:

$$\left(\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}x\cdot\frac{1}{8}-14\right)+\frac{3}{20}\left(\frac{7}{8}x+\frac{5}{6}x\cdot\frac{1}{8}-14\right)$$
$$=\frac{23}{20}\left(\frac{47}{48}x-14\right).$$

Pe de altă parte în enunț ni se spune că au fost în anul următor 92 elevi în anul al 2-lea, rezultă dar că putem scri:

$$\frac{23}{20}\left(\frac{47}{48}x-14\right)=92,$$

care este ecuația problemei.

Din (1) deducem:

$$\frac{47}{48}x-14=\frac{92\times 20}{23}=80,$$

de unde:

$$x=(80+14)\frac{48}{47}=\frac{94\times 48}{47}=96 \text{ elevi.}$$

Au fost deci 96 elevi în primul an și $\frac{5}{6}\times 96=80$ elevi în anul al 2-lea:

Soluții date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Boborodea Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iași), *Burghelea Crăesteanu* (lic. Milit., Cernăuți), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit., Iași), *Cristea G. Emilian* (lic. Milit., Cernăuți), *Cruțescu Trotuș* (lic. Milit., Cernăuți), *Dumitrescu Valeriu* (lic. Milit., Cernăuți), *Floareș Adrian* (lic. Milit., Cernăuți), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gavrilescu N. C-tin* (Iași), *Grumăzescu Mircea* (Șc. Ofițeri de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuș), *Isac C. D-tru* (lic. Milit., Iași), *Lazăr Aurel* (lic. Milit., Cernăuți), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Pregăt., de Ofițeri), *Măgală I. Gh.* (lic Milit., Cernăuți), *Mareș D. Petre* (lic. Milit., Cernăuți), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuș), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Moroz Sigismund* (Șc. de Conductori Architecți), *Murgu V. Marțian* (lic. Beiuș), *Nedelcu V. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Nistorescu Dan* (lic. Milit, Cernăuți), *Opran C. R.* (lic. Milit., Cernăuți), *Pană Petre* (lic. Milit, N. Filipescu), *Paraschivescu Mircea* (lic. Milit., Cernăuți), *Popa C. Benone* (lic. Milit., Cernăuți), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Pupăzan V.* (Tg-Jiu), *Rădulescu Gh. Octav* (lic. Milit., N. Filipescu), *Rennert Sami* (Șc. Conductori de Architecți), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Russu I. Eugen* (lic. Milit., Cernăuți), *Secară Gh. Anton* (lic. Milit., Cernăuți) și *Vasilescu A. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuți).

1340. — *Să se determine m astfel ca ecuația:*

$$x^3-3mx^2+6x-4=0,$$

să admită o rădăcină, care să fie media aritmetică a celorlalte două.

IONESCU EMIL ARGETOIA

Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinele ecuației date. Conform enunțului trebuie să avem:

$$(1)\qquad x_1=\frac{x_2+x_2}{2}.$$

De altă parte, privind ecuația dată și scriind relația cunoscută între suma rădăcinilor și coeficienți, avem:

$$(2)\qquad x_1+x_2+x_3=3m.$$

Cum din (1):

$$x_2+x_3=2x_1,$$

relația (2) devine:

$$x_1+2x_1=3m,$$

de unde:

$$x_1=m.$$

m este astfel o rădăcină a ecuației date și scriind că o verifică, găsim:

$$m^3-3m^3+6m-4=0$$
$$\overset{*}{**}\quad(3)\qquad m^3-3m+2=0.$$

m trebuie deci să satisfacă ecuația (3), care se mai poate scri, observând că primul membru se anulează pentru $m=1$ și $m=-2$:

$$(m-1)(m+2)(m-1)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuații sunt:

$$m_1=1,\qquad m_2=-2,\qquad m_3=1.$$

Acestea sunt valorile cerute pentru m.

Soluții date de d-ra: *Popescu Maria* (studentă, București) și de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic Buzești, Craiova), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Boitan P. Nicolae* (lic Milit, Cernăuți), *Burghelea Stelian* (lic. Milit, Cernăuți), *Caraman Vasile* (lic. Milit., Cernăuți), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Cristea Emilian* (lic. Milit., Cernăuți), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dumitrescu I. Petre* (lic. Milit., Cernăuți), *Floareș Adrian* (lic. Milit., Cernăuți), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit, Chișinău), *Gavrilescu C-tin* (Iași), *Grigorescu Vintilă* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ionescu C. Stefan* (lic. Milit, N Filipescu), *Lazăr Aurel* (lic. Milit., Cernăuți), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Pregăt. de Ofițeri), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuți), *Mareș D. Petre* (lic. Milit., Cernăuți), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș),

Mihalcea N. N. (lic. Beiuş), *Milea G. E.* (Sub-Lt), *Millu I. Nlcolae* (lic. Milit., Chişinău), *Nedelcu V. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Opran C. Robăneşti* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Pupăzan C.* (lic. Tg-Jiu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Russu I. Eugen* (lic. Milit., Cernăuţi), *Săvulescu Spirea*, *Secară St. Anton* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stănciulescu Gh. Brăila* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stefănescu Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N Filipescu) şi *Vasilescu A. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi).

1344. — *Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relaţia:*

$$\sum \frac{\sin 2A}{\cos B \cos C} \sin (B - C) = 0.$$

ŞTEFAN MUSTA

Insemnând cu E primul membru şi ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \cos A \sin (B + C)$$

şi analoagele lor, putem scri:

$$(1) \quad E = 2 \sum \frac{\cos A \sin (B + C) \sin (B - C)}{\cos B \cos C}$$

$$= 2 \sum \frac{\cos^2 A \sin (B + C) \sin (B - C)}{\cos A \cos B \cos C}.$$

Avem însă:

$$\sin (B + C) \sin (B - C) =$$

$$(\sin B \cos C + \sin C \cos B)(\sin B \cos C - \sin C \cos B)$$

$$= \sin^2 B \cos^2 C - \sin^2 C \cos^2 B =$$

$$(1 - \cos^2 B) \cos^2 C - (1 - \cos^2 C) \cos^2 B$$

$$= \cos^2 C - \cos^2 B,$$

astfel că relaţia (1) devine succesiv:

$$E = 2 \sum \frac{\cos^2 A (\cos^2 C - \cos^2 B)}{\cos A \cos B \cos C} =$$

$$2 \frac{\cos^2 A (\cos^2 C - \cos^2 B) + \cos^2 B (\cos^2 A - \cos^2 C)}{\cos A \cos B \cos C} +$$

$$\frac{\cos^2 C (\cos^2 B - \cos^2 A)}{\cos A \cos B \cos C} = 0,$$

dacă triunghiul este oarecare.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (lic. Craiova), *Andrunachievici V.* (lic. Chişinău), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Burghelea Crăesteanu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dumitrescu I. Petre* (lic. Milit., Cernăuţi), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milea G. E.* (Sub-Lt), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Opran C. Robăneşti*, *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit, Cernăuţi), *Secară Gh. Anton* (lic. Milit., Cernăuţi), *Surmei I. Mihai* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Ţiţeica I. Ioan* (lic. Milit., N. Filipescu).

1352. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia:*

$$\frac{a r_a + b r_b + c r_c}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = \frac{R}{r} (2R - r)$$

CEZAR IVANESCU

Din relaţiile cunoscute:

$$s = (p - a) r_a = p r, \qquad r_a + r_b + r_c = 4R + r,$$

deducem:

$$a r_a = p r_a - s$$

şi analog:

$$b r_b = p r_b - s, \qquad c r_c = p r_c - s,$$

deci:

$$(1) \quad a r_a + b r_b + c r_c = p (r_a + r_b + r_c) - 3s =$$

$$p (4R + r) - 3 p r = 2 p (2R - r).$$

Apoi ţinând seamă de relaţia cunoscută:

$$a = 2R \sin A,$$

şi analoagele ei, putem scri succesiv:

$$(2) \quad a \cos A + b \cos B + c \cos C =$$

$$2R (\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) =$$

$$R (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) =$$

$$R [2 \sin (A + B) \cos (A - B) + 2 \sin C \cos C] =$$

$$2R \sin C [\cos (A - B) + \cos C] =$$

$$4R \sin C \cos \frac{A - B + C}{2} \cos \frac{A - B - C}{2} =$$

$$4R \sin A \sin B \sin C = \frac{2s}{R} = \frac{2 p r}{R}.$$

Impărţind relaţiile (1) şi (2), găsim:

$$\frac{a r_a + b r_b + c r_c}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = \frac{R}{r} (2R - r).$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova). *Andrunachievici V.* (lic. Chişinău), *Bucur N. Virgil* (lic, Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu Gh. Haralambie* (lic.

Milit., Chişinău), *Gavrilescu N. C.* (Iaşi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit., de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica Pompeiu, Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Mitache Anton* (lic. Milit., Chişinău), *Murgu V. Marţian* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ţarălungă Gh. D-tru* (lic. Milit., Tg.-Mureş) şi *Ţiţeica I. Ioan* (lic. Milit., N. Filipescu).

1353. — *Să se arate că fracţia:*

$$\frac{31\times 2^{2p+1}+1}{19\times 4^{2p+1}-1},$$

se poate simplifica cu 3, p fiind întreg pozitiv.

ION MARGINEANU

Să arătăm că şi numărătorul şi numitorul sunt multipli de 3.

In adevăr, putem scri evident:

$$(1)\quad 31\times 2^{2p+1}+1=(\text{mult. } 3+1)\times 2^{2p+1}+1=$$
$$\text{mult. } 3+2^{2p+1}+1=\text{mult. } 3+(3-1)^{2p+1}+1$$
$$=\text{mult. } 3+(-1)^{2p+1}+1=\text{mult. } 3-1+1=\text{mult. } 3$$

$$(2)\quad 19\times 4^{2p+1}-1=(\text{mult. } 3+1)\times 4^{2p+1}-1=$$
$$\text{mult. } 3+4^{2p+1}-1=\text{mult. } 3+(3+1)^{2p+1}-1$$
$$=\text{mult. } 3+(+1)^{2p+1}-1=\text{mult. } 3+1-1=\text{mult. } 3.$$

Relaţiile (1) şi (2) ne permit a afirma că fracţia dată să simplifică cu 3.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel, Andrunachievici V. Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit., Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cehan Gh. Aristide* (lic. Milit, Cernăuţi), *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova), *Constantinescu C. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Craiu S. Petre* (lic. Milit, Cernăuţi), *Cristea G. Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit, N. Filipescu), *Dulămiţă Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Dumitrascu Aurelian* (lic. Milit., Craiova), *Eavaropol Mircea* (lic. Milit., Craiova), *Enăşescu D. V.* (lic. Milit., Iaşi), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Ionescu D.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milea G. E.* (Sub-Lt), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Rotaru Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuţi), *Segărceanu Marin* (lic. Mitit., Craiova), *Stoica D.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Teofan Iosub* (lic. Milit., Craiova), *Ţiţeica I. Ioan* (lic. Milit, N. Filipescu), *Vasiliu M. Olimpiu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Verjinski Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Zgârcea Gherasim* (lic Milit., Cernăuţi).

1355. — *Să se verifice identitatea:*

$$[(a+b)^2-ab-1]\,[(a+b)^4+(a+b)^2(1-2ab)+$$
$$ab(ab-1)+1]=[(a-b)^2+3ab]^3-1$$

MIHAIL BOTEZ

Notând cu E primul membru, putem scri succesiv:

$$E=[(a^2+ab+b^2)-1]\,[(a+b)^4-2ab(a+b)^2$$
$$+a^2b^2+(a+b)^2-ab+1]$$
$$=[(a^2+ab+b^2)-1]\,\{[(a+b)^2-ab]^2+$$
$$[(a+b)^2-ab]+1\}$$
$$=[(a^2+ab+b^2)-1]\,[(a^2+ab+b^2)^2+$$
$$(a^2+ab+b^2)+1]=(a^2+ab+b^2)^3-1$$
$$=[(a-b)^2+3ab]^3-1.$$

Identitatea dată este astfel verificată.

Soluţii date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrei Jean* (lic. Milit., Craiova), *Caraman D. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Constantinescu C. C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dobrescu Paul* (lic. Milit, N. Filipescu), *Dulămiţă Gr. Ioan* (lic. Milit, Craiova), *Florescu Gh. Haralambie* (Gorj), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit., de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Milit, de Artilerie), *Măgală Gk.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Mascaş Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihai I. Gheorghe* (lic. Milit, Craiova), *Mihailescu D. Ioan* (lic. Milit, Craiova), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Munteanu V. Lazăr* (lic Milit., Tg-Mureş), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Nicolaescu Nicolae* (lic. Milit., Craiova), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popoviciu I. Gavril, Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Savin I. Roman* (lic. Milit., Craiova), *Secară M. D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Tanasiciuc V. Claudius* (lic. Milit., Cernăuţi), *Teofan Iosub* (lic. Milit, Craiova) şi *Ţica P. Marin-Gall* (Bucureşti).

PROBLEME PROPUSE

1433. — Un părinte lasă prin testament celor patru fii a-i săi, drept moştenire, averea sa, împărţită astfel:

Primului îi lasă din avere $\frac{3}{10}$, plus 20000 lei.

Celui de al 2-lea îi lasă din rest $\frac{3}{8}$, plus 25000

lei. Celui de al 3-lea îi lasă $\frac{7}{9}$ din suma rămasă după ce primii doi şi-au luat părţile respective, mai puţin 50000 lei. In fine, celui mai mic îi lasă restul final, care este de 100000 lei.

Să se calculeze care este moştenirea totală şi cari sunt părţile cuvenite primilor 3 copii.

M. GHERMANESCU

1434. — Să se găsească un patrat perfect de cinci cifre, care este egal cu de două ori produsul numerilor, formate cu primele două cifre şi ultimele trei cifre.

V. THÉBAULT

1435. — In cercul de centru O, fie P Q un diametru şi O M, O N două raze perpendiculare, iar R un punct oarecare pe P Q. Suma ariilor patratelor construite pe R P şi R Q, face cât dublul ariei patratului construit pe R M adunat cu de opt ori aria triunghiului O N R, sau cu de două ori aria patratului construit pe R N adunat cu de opt ori aria triunghiului O M R.

N N. MIHAILEANU

1436. — In triunghiul dat A B C, bisectoarea interioară şi cea exterioară duse din A, întâlnesc latura B C, respectiv în D şi E. Se proectează punctele C, B, E pe o paralelă la A E dusă prin punctul D, în punctele F, G, H şi punctele C, D, E pe o paralelă la A C dusă prin punctul B în punctele L, M, N. Se cere:

1°. Suprafaţa mărginită de conturul:

E N B D F C L M G H E.

2°. Lungimea G M.

LOCOT. C. D. IONESCU-ŢIU

1437. — Fie M un punct mobil pe cercul de diametru fix A B. Tangentele în M şi B la cerc se întâlnesc în N. Dreapta A N taie cercul a doua oară în C. Se cere locul punctului de intersecţie al tangentei în C la cerc cu M N.

G-L GH. BUICLIU

1438. — Se dă tetraedrul V A B C, la care vârful V se proectează în O, centrul cercului A B C. Insemnând cu $2a$, $2b$, $2c$ respectiv lungimele $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ şi cu h lungimea segmentului VC', care uneşte vârful V cu mijlocul C' al laturei $\overline{AB}$, *să se exprime volumul tetraedrului V A B C* în funcţiune de aceste date ale problemei.

2°. Să se deducă înălţimele feţelor laterale V B C şi V C A, utilizând această expresiune a volumului. Discuţiune asupra condiţiunilor de posibilitate ale problemei.

3°. Să se calculeze (în cazul când problema este posibilă) razele cercurilor V A B, V B C, V C A în funcţiune de datele problemei.

4°. Ce relaţiune de legătură trebue să avem între datele problemei, pentru ca unghiul diedru V A B C (cu muchia A B) să fie de 60°?

O. N. ŢINO

1439. — Cum trebue să fie m, pentru ca rădăcinele ecuaţiei:

$$(2 - m)x^2 - 2mx + m^2 - 3m = 0,$$

să fie, una mai mică de cât — 1 şi alta mai mare ca 1.

N. ABRAMESCU

1440. — Doi săteni pornesc cu căruţele, în acelaşi timp, primul de la *Reşiţa* la *Văliug*, al 2-lea de la *Văliug* la *Reşiţa*.

După două ore de mers, primul se opreşte o oră, pe când celalt continuă drumul.

După ora de oprire, distanţa dintre cei doi săteni mai era de 3 Km., şi ei continându-şi drumul ajung în acelaşi timp, primul la *Văliug*, al 2-lea la *Reşiţa*. Dacă în momentul când sătenii se aflau la 3 Km. unul de altul (la finele orei de oprire a primului) ar fi continuat drumul, primul cu viteza celui de al 2-lea şi al 2-lea cu viteza primului, atunci primul ar fi ajuns la *Văliug* cu $1^h 6^m$ după ce al 2-lea ar fi ajuns la Reşiţa. Să se afle distanţa în Km. dintre *Reşiţa* şi *Văliug* şi vitezele în Km/oră cu care au mers căruţele cu cei doi săteni.

V. ALACI

INFORMAȚIUNI

ȘCOALA POLITEHNICĂ TIMIȘOARA.

Candidații reușiți la examenul de admitere în anul preparator. — (Anul școlar 1935 — 1936.)

1. *Georgescu Hr. Vasile* (lic. Unirea, Focșani).
2. *Vințcovschi P. Mihail* (lic. de băeți, Cetatea Albă).
3. *Hlopov M. Victor* (lic. Marele Voevod Mihai, Cet.-Albă).
4. *Fleschin S. Petru* (lic. Gheorghe Lazar, Sibiu).
5. *Opriș I. Șerban* (lic. de băeți, Petroșani).
6. *Merșiu I. Ienachie* (lic. Traian Doda, Caransebeș).
7. *Climov I. Victor* (lic. A. D. Xenopol, Soroca).
8. *Tănasie P. Alexandru* (lic. Frații Buzești, Craiova).
9. *Nicanorov Al. Gheorghe* (lic. Marele Voevod Mihai, Cetatea-Albă).
10. *Boescu V. Gheorghe* (lic. Al. Lahovary, Râmn. Vâlcei).
11. *Scorțeanu T. Sterea* (lic. Regele Carol II, Bolgrad).
12. *Tebeica D. Virgiuliu* (lic. G-ral. G. V. Macarovici, Iași).
13. *Gheleșel P. Vasile* (Șc. Sup. Arte Meserii, Brașov).
14. *Pop I. Liviu* (lic. Andrei Mureșanu, Dej).
15. *Scurtu I. Nicolae* (lic. Ioan Creangă, Bălți).
16. *Colojoară A. Ioan* (lic. Cor. Bredicianu, Lugoj).
17. *Sosievici P. Boris* (lic. Ștefan cel Mare, Tighina).
18. *Costache D. Ilie* (lic. Tasse Dumitrescu, Mizil).
19. *Ghirlean H. Boris* (lic. M. Voevod Mihai, Cet.-Albă).
20. *Sebestyen A. Andrei* (lic. Piarist, Timișoara).
21. *Azman D. Sava* (lic. Regele Carol II, Bolgrad).
22. *Dragomir S. Străin* (lic. G-ral Dragalina, Oravița).
23. *Patriciu M. Victor* (lic. Gheorghe Lazăr, București).
24. *Brânda I. Liv. Virgil* (Cor. Brediceanu, Lugoj).
25. *Balasz S. Iosif* (lic Dragoș Vodă, Sigh Marmației).
26. *Demianov B. Victor* (lic. S-ft. Dumitru Ismail).
27. *Unguraș M. Mircu* (Șc. Cond. Desenatori Archit., Cernăuți).
28. *Mira I. Ioan* (lic Ref. de băeți, Cluj).
29. *Avram T. Lazar Ioan* (lic. Avram Iancu, Brad).
30. *Borlea C. Ioan* (lic. Regele Ferdinand, Turda)
31. *Leon C. Constantin* (lic. Unirea, Focșani).
32. *Popovici V. Corn. Tiberiu* (lic. Piarist, Timișoara).
33. *Drăgușanu C. Gheorghe* (Șc. Sup. Arte Meserii, Iași).
34. *Marinescu N. Romulus* (lic. Carol I, Craiova).
35. *Petri M. Gertrude* (lic. Regina Maria, Cluj).
36. *Kaflikiewicz B. B. Iosif* (lic. Șt. L Roth, Mediaș).
37. *Melnic St. Alexandru* (lic. Alecu Rusu, Chișinău).
38. *Rotariu I. Emil* (lic. Titu Maiorescu, Aiud).

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

PUBLICAŢIUNILE INSTITUTULUI MATEMATIC ROMAN

Director: prof. dr. Rodolphe RACLIŞ, Aleea Vulpache 21, Bucureşti 3, Telefon 22.444

AU APĂRUT PENTRU ANUL ŞCOLAR 1934—1935:

1° GEOMETRIE ANALITICĂ de *G. Ţiţeica*, ediţia 4-a, inclusiv chestiuni de examen, rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

2° ALGEBRĂ SUPERIOARĂ de *A. Angelescu*, ediţia 3-a, inclusiv probleme de Seminar, chestiuni de examen, rezolvate; pentru studenţii din Anul I, secţia Matematică, şi elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 240 lei

3° MATEMATICI ELEMENTARE şi GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *D. Barbilian*, ediţia 3-a, partea întâia, Algebră . . . . . 70 lei

4° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, cuprinde Dreapta, Planul, Conice, Cuadrice, cu exerciţii, probleme de seminar, şi chestiuni de examen; pentru studenţii dln Anul I, secţiile Matematică şi Fizico-chimice şi elevii din Anul preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

5° GEOMETRIE ANALITICĂ, de *D. Pompeiu*, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . 50 lei

6° MECANICĂ, partea I, de *A. G. Ioachimescu*, ediţia 2-a, cu probleme, pentru elevii din Anul Preparator, Şcoalele Politechnice . . . . . 90 lei

7° CULEGERE DE PROBLEME DE GEOMETRIE DESCRIPTIVĂ de *Tr. Lalescu*, ediţia 2-a, pentru elevii clasei VII secundară secţia ştiinţifică, pentru elevii Liceelor Militare, pentru studenţii Anului I, secţiile Matematică. Electrotechnică şi Chimie Industrială, pentru elevii Anului Preparator de la Şcoalele Politechnice şi Academia de Arhitectură.

8. ELEMENTE DE CALCUL DIFERENŢIAL ŞI CALCUL INTEGRAL de *R. Racliş*, ediţia 2-a, cu exerciţii şi probleme de Seminar; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică, şi elevii din Anul I, Şcoalele Politechnice.

9° ANALIZA INFINITEZIMALĂ de *A. Davidoglu*, ediţia 4-a, cu exerciţii, probleme de seminar şi chestiuni de examen; pentru studenţii din Anul II, secţia Matematică . . . . . 240 lei

10° MECANICA RAŢIONALĂ, partea II, de *A. G. Ioachimescu*, cu chestiuni de examen, rezolvate; pentru elevii din anul I, Şcoalele Politechnice . . . . . 190 lei

11° REVISTA UNIVERSITARA MATEMATICA, journal rédigé par *Rodolphe Raclis*, pour les candidats à la Licence et les élèves des Grandes Ecoles, in 8° de VIII+256 pages; cuprinde chestiuni de examen rezolvate şi articole, note sau probleme semnate Tr. Lalescu, E. Picard, V. Volterra, G. Julia, G. Ţiţeica, D. Pompeiu, I. Ionescu, V. Vâlcovici, R. Racliş, H. Villat, D. Barbilian, N. Coculescu, E. Cahen, D. Emanuel, G. Filipescu, A. Ioachimescu, G. Nichifor, Sc. Panaitescu, C. Popovici, S. Sanielevici, G. Sudan, L. Teodoriu, V. Claudian Coşniţă, N. Botea, Ş. Ţiţeica, N. Teodorescu, I. Georgescu Racoviţă, C. Ionescu Bujor, G. Simionescu, T. Popoviciu, Caius Iacob, C. Drâmbă, G. Tailer, Tr. Lişcu, R. Woinarosky, etc. . . . . 140 le

12° LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE par *Trajan Lalesco*, (pour paraître prochainement).

13° INTRODUCTION A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES par *Trajan Lalesco*, 2-e édition (pour paraître prochainement).

14° SOLUTION PRINCIPALE DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES DE POINCARÉ par *Rodolphe Racliş*, édition des Presses Universitaires de France, Paris . . . . . 190 lei

15° ANNALES ROUMAINES DE MATHÉMATIQUES, journal publié par *Rodolphe Racliş* (pour paraître prochainement).

Publicaţiile Institutului Matematic Român se găsesc de vânzare la Librăria „Cartea Românească" Bulevardul Academiei 3, Bucureşti 1.

ANUL XV. 15 DECEMBRIE 1935 No. 10.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. ALACI: DARE DE SEAMA DESPRE O LUCRARE A D-LUI PROF. C. O. OAKLEY (HAVERFORD COLLEGE)
2. NOTE MATEMATICE: 18, 19.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 334, 1251, 1339, 1348, 1358, 1394.
6. PROBLEME PROPUSE: 1441-1448.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1935

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

DARE DE SEAMĂ DESPRE O LUCRARE A D-LUI PROF. C. O. OAKLEY,

HAVERFORD COLLEGE

DE V. ALACI

1. In revista „The American Mathematical Monthly" din Octomvrie 1935, d-l prof. *Oakley*, tratează într'un articol intitulat *„Equations Polygons"* o clasă de ecuațiuni, numite *„ecuațiuni semiliniare"* în care folosește noțiunea de *valoare absolută* și care sunt capabile de a reprezenta o întinsă varietate de grafice, ca linii frânte, poligoane, segmente, arii, etc.

Am constatat cetind acest articol, care m'a interesat prin aceea că el tratează chestiuni de aceiași natură cu acelea pe care le-am tratat și eu încă din 1930[1], că autorul n'a cunoscut lucrările lui *G. Tacchella*[2] (1933), care a folosit tot noțiunea de *„valoare absolută"* și nici lucrările d-lui Ing. *L. Laboccetta*[3] (1922) și ale mele. Voiu informa de altfel pe d-l prof *Oakley* despre lucrările menționate, anterioare lucrărei d-sale.

2. D-l prof. *Oakley* începe prin tratarea câtorva exemple.

1°. *Se cere graficul ecuației semiliniare:*

$$(1) \qquad x-1+|x+y-1|=0.$$

Dreapta $u=x+y-1=0$, numită de d-sa diagonală, împarte planul în două regiuni, una în care $u>0$, aceea ce nu cuprinde origina și a doua în care $u<0$. In prima regiune trebuie să luăm:

$$|x+y-1|=x+y-1,$$

iar în cealaltă:

$$|x+y-1|=-(x+y-1).$$

Astfel ecuațiunea (1) devine respectiv pentru cele două regiuni, așa cum scrie d-sa:

$$+, \qquad 2x+y-1=0$$
$$-, \qquad y=0$$

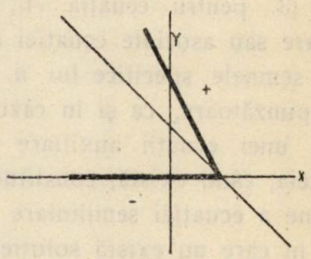


Fig. 1.

Graficul funcțiunei definită de (1), este linia frântă din fig. 1.[1]

2°. Se cere graficul ecuațiunei semiliniare:

$$(2) \qquad -1+|x|+|x+y-1|=0.$$

Aci avem două diagonale:

$$u_1=x=0, \qquad u_2=x+y-1=0,$$

care împart planul în patru regiuni, așa cum se vede în fig. 2, în care semnele specifice care trebuesc luate simultan în (2) pentru u_1 și u_2, sunt: $++;-+;--;+-$, astfel că ecuația (2) devine în cele patru regiuni, respectiv:

---

[1]) *V. Alaci.* 1°. Une classe de fonctions discontinues de première espèce (1930). 2°. Géométrie Analytique des polygones et des polyèdres convexes (1930). 3°. Une classe de fonctions simple-discontinues à deux variables (1931). 4°. Une classe d'équations fonctionnelles à solutions simples-discontinues (1934). 5°. De quelques fonctions simples-discontinues représentées segmentairement par différents arcs de courbe (1935). (Publicate în „Bulletin Scientifique de l'École Polytechnique" de Timișoara).

[2]) *Giuseppe Tacchella.* Fondamenti di Geometria Analitica a due ed tre dimensioni dei *Luoghi* Lineare „Composti". (Lucrare premiată cu premiul *„Savoia Brabante"*. A se vedea darea de seamă ce am făcut în „Revista Matematică din Timișoara, anul XIV, No. 3).

[3]) Ing. *L. Laboccetta.* (A se vedea darea de seamă ce am făcut în „Revista Matematică din Timișoara", anul XIV, No. 1.)

[1]) Figurile sunt redate din articolul autorului.

$$(3)\quad \begin{array}{ll} + +, & 2x + y - 2 = 0 \\ - +, & y - 2 = 0 \\ - -, & 2x - y = 0 \\ + -, & -y = 0 \end{array}$$

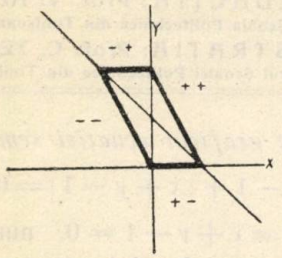


Fig. 2.

Graficul funcţiunei definită de (2) este paralelogramul din fig. 2.

Definiţii date de d-l prof. Oakley.

O ecuaţie de forma:

$$(4)\quad u_0 + m_1 |u_1| + \cdots + m_n |u_n| = 0,$$

unde $m_i \neq 0$ sunt constante, iar:

$$u_i \equiv a_i x + b_i y + c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

sunt funcţiuni distincte de variabile reale, se numeşte *o ecuaţie semiliniară de ordinul n.* Ecuaţiile analoage cu (3) pentru ecuaţia (4), se numesc ecuaţii auxiliare sau asociate ecuaţiei (4) şi vor fi precedate de semnele specifice lui u_i pentru regiunile corespunzătoare, ca şi în cazurile de mai sus. Graficul unei ecuaţii auxiliare în regiunea asociată acesteia, când există, constitue soluţiunea în acea regiune a ecuaţiei semiliniare (4).

Regiunile, in care nu există soluţie, se numesc regiuni lacunare.

Dreptele $u_i = 0$ se numesc diagonale.

3. Dacă în ecuaţia (2) am lua semnul — înaintea lui $|x + y - 1|$, graficul corespunzător ar fi

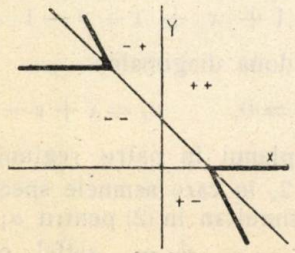


Fig. 3.

un poligon deschis, acel din fig. 3. Această operaţie deci, „deschide poligonul".

Acum vom da şi alte exemple.

3°. Ecuaţia semiliniară de ordinul al 3-lea:

$$(5)\quad -x + |x| - |x - 1| + |y| = 0,$$

are trei diagonale, care împart planul numai în 6 regiuni, deoarece două din diagonale sunt paralele şi graficul ecuaţiei (5) este acel din fig. 4.

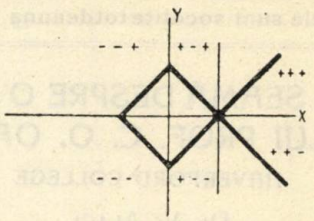


Fig. 4.

4°. In ecuaţia semiliniară:

$$(6)\quad |x - 1| + |x - y - 1| = 0,$$

diagonalele se intersectează în punctul (1, 0). Acest punct constitue graficul ecuaţiei (6), el aparţine celor 4 regiuni formate de diagonale.

5°. Ecuaţia semiliniară:

$$(7)\quad x + 1 + |x| + |y| = 0,$$

nu-i satisfăcută de nici un punct.

6°. Ecuaţia semiliniară:

$$(8)\quad -1 + |x| + |x - 1| + |y| = 0,$$

este interesantă. Cele trei diagonale a ecuaţiei (8), sunt:

$$x = 0, \qquad x - 1 = 0, \qquad y = 0,$$

iar ecuaţiile asociate, ţinând seamă de semnele specifice, sunt:

$$\begin{array}{ll} + + +, & 2x + y - 2 = 0 \\ + - +, & y = 0 \\ - - +, & -2x + y = 0 \\ - - -, & -2x - y = 0 \\ + - -, & -y = 0 \\ + + -, & 2x - y - 2 = 1. \end{array}$$

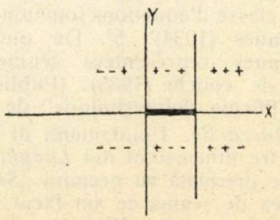


Fig. 5.

Graficul lui (8) este segmentul axei x-lor de la 0 la 1, fig. 5.

Observare. Ecuaţia semiliniară a unei configuraţii nu este unică, de exemplu, ecuaţiile semiliniare:

$$-1+|x|+|x-1|+k|y|=0, \quad k>0$$

$$-3+|x|+|x-1|+|y+1|+|y|+|y-1|=0$$

$$y+1-|x|-3|y|-|x+y-1|=0,$$

reprezintă fiecare acelaşi segment al axei x-lor de la 0 la 1, ca şi (8).

4. Dacă pentru o regiune oarecare, ecuaţia asociată a unei ecuaţii semiliniare date se reduce la o identitate, fiecare punct al acelei regiuni este o soluţiune.

Iată câteva exemple.

7°. Ecuaţia semiliniară:

$$x-|x|=0, \tag{9}$$

reprezintă semiplanul din dreapta a dreptei $x=0$.

8°. Ecuaţia semiliniară:

$$x+y+|x|+|y|=0, \tag{10}$$

reprezintă al 3-lea cadran format de axele de coordonate.

9°. Ecuaţia semiliniară:

$$y-a+|x|+|x-a|+|y|=0, \tag{11}$$

reprezintă partea hasurată prelungită în jos la infinit, fig. 6.

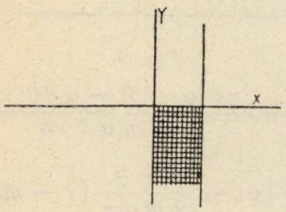


Fig. 6.

10. Ecuaţia semiliniară:

$$x-y+2+3|y|-|x-4y+2|-5|x|+2|x+y-1|=0, \tag{12}$$

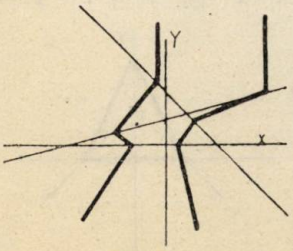


Fig. 7.

are patru diagonale, care împart planul în 11 regiuni dintre care 3 sunt lacunare, fig. 7.

11°. Ecuaţia semiliniară:

$$|x|+|y|=1, \tag{13}$$

reprezintă patratul a cărui diagonale concid cu axele, fig. 8.

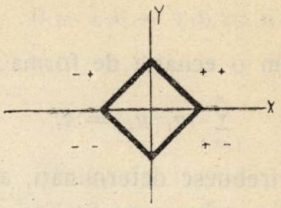


Fig. 8.

5. Am văzut diversitatea graficelor reprezentate de ecuaţia (4) Ea cuprinde n diagonale, care împart planul în $\frac{n(n+1)}{2}+1$ regiuni, dintre care finite sunt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, $(n \geqq 2)$. Cum avem 2^n ecuaţii asociate, urmează că ele sunt în număr mai mare ca acel al regiunilor. Cum una din aceste ecuaţiuni asociate este de forma:

$$u=ax+by+c=0,$$

ea reprezintă o dreaptă, şi poate trece prin regiunea asociată sau nu, în cazul din urmă avem o regiune lacunară.

6. Problema inversă, aceea de a găsi ecuaţia semiliniară a unei configuraţiuni din acelea întâlnite până aci, prezintă multe dificultăţi afirmă d-l prof. *Oakley,* prin alegerea diagonalelor care să izoleze fiecare segment al configuraţiei. Sunt cazuri însă, când această izolare se poate face însă uşor, printr'un fascicol de diagonale, cum este în cazul poligoanelor regulate.

In continuare d-l prof. *Oakley* demonstrează printr'o metodă foarte interesantă, următoarea teoremă, enunţată spune d-sa dar nu demonstrată, şi de d-l prof. *Söderblom.*

Teoremă. Există o ecuaţie semiliniară de ordinul n, care să reprezinte un poligon de 2n laturi.

Dau aci numai câte-va indicaţii. Fie un sistem de axe cu origina în centrul poligonului şi un vârf $(\varrho, 0)$. Coordonatele celorlalte vârfuri, sunt:

$$(14)\quad \begin{cases} \alpha_i = \varrho \cos (i-1)\dfrac{\pi}{n} \\ \beta_i = \varrho \cos (i-1)\dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Ecuaţiile diagonalelor, vor fi:

$$u_i = \alpha_i y - \beta_i x = 0.$$

Căutăm acum o ecuaţie de forma:

$$(15)\quad \sum_{i=1}^{n} m_i |u_i| = k,$$

unde m_i şi k trebuesc determinaţi, astfel ca ea să reprezinte poligonul cerut. Scriind ecuaţiile asociate ecuaţiei semiliniare (15), corespunzătoare diferitelor regiuni, obţinem sistemul:

$$(16)\quad \begin{cases} m_1.0 + m_2\varrho\sin\dfrac{\pi}{n} + \cdots + m_n\varrho\sin(n-1)\dfrac{\pi}{n} = k \\ m_1\varrho\sin\dfrac{\pi}{n} + m_2\,0 + \cdots + m_n\varrho\sin(n-2)\dfrac{\pi}{n} = k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1\varrho\sin(n-1)\dfrac{\pi}{n} + m_2\varrho\sin(n-2)\dfrac{\pi}{n} + \cdots + m_n.0 = k, \end{cases}$$

care se poate rezolva în raport cu $m_1, m_2, \ldots m_n$. Autorul se ocupă pe larg de rezolvarea sistemului (16) şi arată în mod ingenios, că determinanţii ciclici ce intervin, se simplifică ajungând la rezultatul extrem de simplu:

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_n = \frac{k}{\varrho \cot\dfrac{\pi}{2n}},$$

astfel că ecuţia cerută devine:

$$(17)\quad \sum_{i=1}^{n} \left| y\cos(i-1)\frac{\pi}{n} - x\sin(i-1)\frac{\pi}{n} \right| = \varrho \cot\frac{\pi}{2n}.$$

Cazuri particulare. Pentru $n=2$ şi $n=3$, ecuţia (17) devine:

$$|x| + |y| = 1, \quad |y| + \frac{1}{2}\left|y - \sqrt{3}x\right| + \frac{1}{2}\left|-y - \sqrt{3}\,x\right| = \varrho\sqrt{3},$$

care sunt respectiv ecuaţiile semiliniare a patratului şi exagonului regulat.

Interpretare geometrică. Autorul dă o interpretare simplă pentru ecuaţia (17), care poate l'a şi condus la simplificările făcute. Astfel pentrucă ecuaţia $u_i = 0$, este forma normală a diagonalelor, *rezultă că* $\sum_{i=1}^{m} u_i$, *reprezintă suma distanţelor unui punct oarecare a perimetrului poligonului la diagonalele lui şi ecuaţia (17) scrie că această sumă este constantă.* Această propoziţie spune autorul, era cunoscută şi de d l prof. *Söderblom.* Demonstraţia reiasă din observarea că, suma distanţelor unui punct P de pe una din laturile AB a poligonului, la diagonalele O A şi O B este constantă şi egală evident cu înălţimea triunghiului isoscel A O B dusă din A sau B şi la fel pentru suma distanţelor lui P la alte oricare două diagonale simetrice cu O A şi O B.

7. Autorul demonstrează încă următoarea teoremă:

Teoremă. Există o ecuaţie semiliniară de ordinul al 2-lea, pentru fiecare patrulater ale cărui diagonale se întretaie într'un punct interior.

Dacă alegem ca diagonale şi vârfuri acelea ce se vâd pe fig. 9, ecuaţia patrulaterului este:

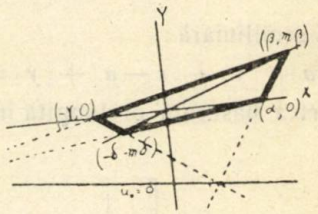


Fig. 9.

$$(18)\quad \frac{\gamma-\alpha}{2\alpha\gamma}x + \frac{\gamma\delta(\alpha-\beta) - \alpha\beta(\gamma-\delta)}{2m\alpha\beta\gamma\delta}y - 1 + \frac{\beta+\delta}{2m\beta\delta}|y| + \frac{\alpha+\gamma}{2m\alpha\gamma}|y - mx| = 0.$$

8. Autorul dă încă câteva extinderi de ecuaţii semiliniare, de exemplu.

12°. Ecuaţia semiliniară:

$$(19)\quad -1 + |x| + \big||x| + y - 1\big| = 0,$$

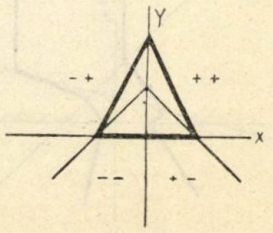


Fig. 10.

are graficul format din un tringhiu şi două semidrepte, fig. 10.

13°. Ecuaţia semiliniară:

(20) $$-1+|x|+\big||x|+|y|-1\big|=0,$$

are graficul din fig. 11.

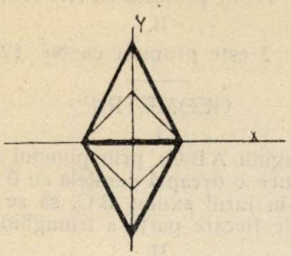


Fig. 11.

14°. Graficele din figurile 12 şi 13, au ca ecuatii semiliniare respectiv:

(21) $$-1+|x+y-1|+|y+x^2|=0$$

(22) $$-1+|x+y-1|+|x^2+y^2-1|=0.$$

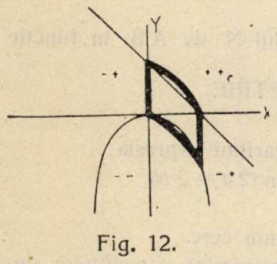


Fig. 12.

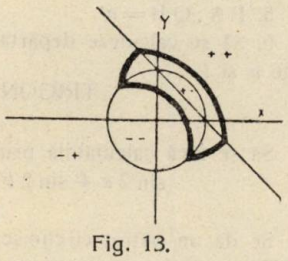


Fig. 13.

9. Se pot considera şi ecuaţii semiliniare cu 3 sau mai multe variabile, de exemplu.

15°. Ecuaţia semiliniară:

(23) $$|x|+|x-1|+|y|+|z|=1,$$

reprezintă în spaţiu cu 3 dimensiuni, segmentul de la 0 la 1 pe axa x-lor.

10. Acestea sunt pe scurt cunostinţele interesante cuprinse în articolul d-lui prof. *C. O. Oakley* şi care împreună cu lucrările celorlalţi autori amintiţi la începutul acestui articol, formează materialul prim, din care cred eu, se va cristaliza în scurt timp, teoria definitivă şi aplicaţiile corespunzătoare, din intinsul domeniu al funcţiilor simplu-discontinue.

NOTE MATEMATICE

18. — *Sur deux équations diophantiennes.*

Sur la résolution de l'équation:

$$x^3=y_1^3+y_2^3+y_3^3, \quad \text{avec} \quad x=y_1+y_2$$

en nombres entiers.

Cette équation est satisfaite par les expressions suivants pour x, y_1, y_2 et y_3:

$$x=9u^3, \quad y_1=v^3, \quad y_2=9u^3-v^3, \quad y_3=3uvw$$

avec la condition:

(1) $$9u^3=v^3+w^3$$

Si $u=\gamma$, $v=\alpha$, $w=\beta$ désigne une solution de (1), on en obtiens une autre par l'emploi des formules suivantes:

$$\begin{cases} v= & \alpha(\alpha^3+2\beta^3) \\ w=- & \beta(\beta^3+2\alpha^3) \\ u= & \gamma(\alpha^3-\beta^3) \end{cases}$$

Exemples numériques:

I. $9^3=8^3+1^3+6^3$ (relation connue)

II. $\overline{8000}^3=\overline{7140}^3+\overline{3087}^3+\overline{4913}^3$

A. GLODEN
(Prof. Luxemburg)

19. — *Recenzie.*

G. Bouligand, Ch. Brunold, A. Grumbach, M Morand, P. Sergescu, M. Taboury, A. Turpain. L'évolution des sciences physiques et mathématiques. (Paris, Flammarion, 1935). In acest volum, apărut în „Biblioteca de filosofie ştiinţifică" de sub direcţia D-lui *Paul Gaultier*, sunt strânse nouă studii expuse recent în faţa studenţilor dela Universitatea din Poitiers. Necesitatea colaborării celor şapte autori, ale căror nume sunt bine cunoscute în lumea ştiinţifică, reese din constatarea, înscrisă în prefaţa volumului, că ştiinţa în evoluţia sa prezintă o complexitate prodigioasă, alături de o lipsă de unitate vizibilă. Punând deoparte dorinţa de totdeauna a savanţilor de a realiza o unitate durabilă a ştiinţei şi de altă parte instabilitatea celor mai cuprinzătoare teorii (ex. legea gravitaţiunii universale a lui *Newton)* suntem conduşi să privim ştiinţa prin prisma unităţii şi pluralităţii. Ceeace pare să dureze nu este unitatea ştiinţei ci pluritatea teoriilor. „Aceasta pluralitate, spun D-nii *Bouligand* şi *Brunold*, a interpretărilor admisibile pentru un grup de fapte recomandă savantului modestia. Ea ne înfăţişează deasemenea ştiinţa din ce în ce mai puţin rigidă". Capitolul al doilea, scris de D-l *Bouligand*: „L'intuition et le paradoxe", vrea să scoată în evidenţă rolul mare pe care îl joacă intuiţia în elaborarea teoremelor de geometrie. Pentru D-l *Bouligand*, în afară de intuiţia imediată, al cărei câmp de aplicare este mai restrâns în matematici, se situiază *intuiţia prelungită*, care a dat posibilitatea — observând că „rolul figurilor efectiv trasate în sprijinul raţionamentului nu este decât accesoriu" — construirii geometriilor spaţiilor cu

mai multe dimensiuni şi geometriilor ne-euclidiene, ale căror afirmaţii apar la prima vedere cu totul paradoxale. Tot intuiţia a făcut posibilă *traducerea* teoremelor de geometrie ne-euclidiană în limbajul celei euclidiene. Când intuiţia — prelungită — s'ar hazarda prea departe, dincolo de graniţele cari-i sunt permise, intervine, ca element corectiv, contra intuiţia. In rezumat avem două forme privilegiate ale intuiţiei matematice: „s'ar putea spune că intuiţia pozitivă, imediată sau prelungită, joacă un rol esenţial în opera constructivă, contra intuiţia având aceeaşi parte în opera critică". (p. 137). — Problema intuiţiei în ştiinţă ridică o alta, cu mult mai importantă, a *cauzalităţii.* Asupra cauzalităţii în geometrie scrie D-l *G. Bouligand* în cap. III, iar asupra cauzalităţii în fizică, D-l *Max Morand*, în cap. VI. O demonstraţie oarecare permite, în general, de a arăta exactitatea unei teoreme sau propoziţii date. „Demonstraţia cauzală, spune D-l *Morand,* pune, din potrivă, direct în evidenţă legătura care uneşte punctul de plecare al raţionamentului cu concluzia sa", permiţându-ne să înţelegem „pentruce rezultatul ia forma demonstrată şi pentruce nu va putea fi diferit" (p. 212). D-l *Bouligand* arată importanţa decisivă ideilor lui *E. Galois* şi teoria grupurilor în problema coordonării demonstraţiilor cauzale. Un alt restaurator al cauzalităţii în geometrie este *Poncelet.* Lucrările norvegianului *Sophas Lie* permite clasificarea ideilor geometrice în ramuri autonome: „Geometria noastră metrică corespunde grupului similitudinilor, geometria lineară grupului transformărilor lineare, geometria proiectivă grupului transformărilor omografice: primul din aceste grupuri este inclus în al doilea, şi al doilea în al treilea" (p. 153). In mecanică, lucrările lui *Einstein* pun în lumină relaţiunea dela cauză la efect ca urmare a faptului că el a geometrizat fenomenul gravitaţiei (e vorba de geometria hiperspaţiilor). O altă etapă recentă în lămurirea noţiunii de cauzalitate o constitue teza d-lui *H. Lebesgue* asupra teoriei integrării şi lucrările lui *René Baire,* asupra funcţiunilor discontinui. In încheere, d-l *Bouligand* arată că în ce priveşte domeniul teoriilor matematice, se poate, aşa cum a arătat şi cu exemple, extrage partea de raţionament aparţind cauzalităţii, deci determinismului.

Cap. I. al părţii a doua: „Sur les traits caractéristiques des mathématiques contemporaines en France" este scris de profesorul român *Petre Sergescu,* dela Universitatea din Cluj. Numele d-lui Prof. *Sergescu,* cunoscut astăzi şi în străinătate ca unul din cei mai buni istorici ai matematicilor, este o garanţie suficientă pentru valoarea acestui studiu. Dealtfel, acest capitol rezumă o expunere mai întinsă publicată în 1933 de D-sa în „Tableau du XX^e^ siècle en France" (fascicola: Les Mathématiques). D-l Prof. *Sergescu* reuşeşte să caracterizeze perfect fiecare idee şi fiecare rezultat nou. Relativ la caracterul general al mişcării matematice contemporane, d-sa observă marea schimbare ce s'a făcut prin democratizarea ştiinţei. Inaintea revoluţiei franceze ştiinţa era rezervată unei elite restrânse, avându-şi sediul în Academii; savanţii nu căutau să-şi facă elevi (p. 78). Incepând cu organizarea de şcoli superioare (Şc. Politechnică şi Normală Superioară, create de *Monge*) şi apoi cu publicarea săptămânalului: Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences, ştiinţa începe să fie difuzată în cercuri mai mari, numărul cercetărilor creşte şi ca rezultat avem o îmbogăţire din ce în ce mai mare în rezultate noui. Un alt moment important este apariţia revistelor periodice, organizarea de congrese naţionale şi internaţionale, cum şi activitatea desfăşurată neîntrerupt în seminariile matematice ale universităţilor. De unde secolul al XVIII-lea nu cunoştea decât lucrările izolate ale savanţilor, astăzi se crează în jurul celor mai reprezentativi, şcoli matematice. Secolul nostru este secolul muncii ştiinţifice colective.

N. O. ZAHARIA

Chestiuni propuse la examenul de admitere în Şcoala Navală, în anul 1935.

ARITMETICĂ.

I

Chestiunea Nr 1 este propusă cu Nr. 1177 în R. M. T.

II.

Chestiunea Nr. 2 este propusă cu Nr. 1273 în R. M. T.

GEOMETRIE.

I.

Se dă un triunghiu A B C, prin punctul de întâlnire al medianelor se duce o dreaptă paralelă cu B C. Dacă triunghiul se roteşte în jurul axului B C, să se determine volumele născute de fiecare parte a triunghiului.

II.

Se dă un segment de dreaptă A B = 2 *a*. In A şi B se ridică perpendiculare de aceiaşi parte şi se ia A P + B Q = P Q = *l*. Să se demonstreze:

1. O şi M fiind mijloacele segmentelor A B şi P Q avem: O M = M P = M Q

2. O P şi O Q sunt perpendiculare.

3. N fiind proecţia lui O pe P Q, să se demonstreze că A N şi N B sunt perpendiculare.

4. Cercul descris cu A B ca diametru este tangent la dreapta P Q.

5. P A . Q B = a^2.

6. Să se calculeze depărtarea lui N de A B în funcţie de *a* şi *l*.

TRIGONOMETRIE.

I.

Să se facă calculabilă prin logaritmi expresia:

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin (2a + 2b).$$

II.

Se dă un patrat circumscris unui cerc.

Să se demonstreze că suma patratelor tangentelor unghiurilor sub care se văd diagonalele patratului depe un punct al cercului, este constantă şi egală cu 8.

ALGEBRĂ.

I.

Problema se găseste în R. M. T. sub Nr. 1202.

II.

Problema se găseste în R. M. T. sub Nr. 1105.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 3, Noemvrie 1935. Nomenclatura geometrică Română, de *I. Ionescu.* Sphères du tétraèdre, par *V. Thébault.* Din generalizările constantei lui *Euler,* de *G. Călugăreanu.* Răspuns la articolul d-lui *G. Calugăreanu,* de *M. Ghermănescu.* Raport asupra lucrărilor propuse pentru premiul *V. Conta,* în 1935, de *I. Ionescu, P. Sergescu* şi *Al. Bunescu.*

2. *Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées, de l'École Polytechnique Roi Carol II, Bucarest,* fasc. 14—15, 1935. Théorémes sur le produit des séries sommables *Borel,* par M. *J. C. Vignaux.* Un procédé graphique pour reconnaître une sinusoïde, par *Ernest Abason.* Note sur l'article de M. *E. Abason.* Sur la méthode de *Thompson* et la méthode des discontinuités

pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques, par M. *Al. Th. Popesco.* Dimensionelle Kohaerenz der Massysteme, von *M. E. Bodea* Une relation thermodynamique, par *D. Teodoresco.* Passage du courant dans les électrolystes sans électrolyse, par M. *Vasilesco Karpen.* Étude physicale sur les réactions des gaz à de trés basses températures, par M. *M. Constantinesco.* Lignes de champ magnetique autour d'une ramification de courants par M. *Sabba S. Stefanesco.* Sur l'étude du récepteur téléphonique, par *I. A. Tanasesco.* Beitrag zur Kenntnis der Stossdauer beim longitudinalen Stoss zilindrischer Stahlstäbe, von Dr. Ing. *Isaila Is. Niculescu.* Contribution à la thèorie de la flottation, par M. *I. Huber-Panu.*

3. *Știință și Progres*, Anul II, No. 6, Noemvrie 1935. Discuția rădăcinelor ecuații de gradul al 2-lea, având în vedere mărimea lor față de numere date, de *N. Abramescu.* Teoria corpusculară a luminii, de Prof. *Eugen Russu.* Teoria cinetică elementară a gazelor, de *Teofil Vescan.* Podoaba de iarnă a camerelor noastre, de Prof. *Ion Popu-Câmpeanu.* Probleme rezolvate și propuse.

4. *Numerus*, Vol. I, caietul 5, 15 Noemvrie 1935, Director *R. N. Racliș.* Conține: chestiuni de examen, probleme propuse. La géométrie du Triangle, par *Tr. Lalesco.* suite dela page 96.

5. *Revista cercului de studii al școalei superioare P. T. T., Timișoara*, anul IV, No. 11.

6. *Gloden.* Sur la décomposition des puissances des nombres premiers de la forme $4r+1$ et des nombres composes renfermant uniquement des facteurs premiers de cette espèce, et des chaines trigardes qui s'y rattachent. (Extrait des Comptes-Rendus du premier Congrès International de Récréation Mathématique).

7. *Pl. Andronescu.* Beitrag zum Problem der Wechselströme beliebiger Kurvenform. (Sonderabdruck aus Archiv für Elektrotechnik, XXIX. Band, 1935, II Heft.

8. *D. Leonida* și *N. Caranfil.* Din istoricul instalațiunilor tehnice ale municipiului București).

9. *Alex. Nicolesco.* Courbes sphériques, courbes *d'Enneper* et de *M. Tzitzéica.* (Extras din Mathematica, Vol. IX).

10. *Caïus Iacob.* Sur le problème de *Dirichlet* pour les fonctions de plusieurs variables complexes. (Extrait du Bulletin des Sciences mathématiques, t. LVIII, avril 1934.)

11. *Caïus Iacob.* Sur un problème de *Dirichlet-Neumann* pour les fonctions de deux variables complexes. (Extrait du soixante-septième Congrès des Sociétés Savantes, 1934).

12. *Caïus Iacob.* Sur un problème de la théorie des sillages.

13. *Caïus Iacob.* Sur quelques problèmes mixtes dans une couronne circulaire. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences t. 196, 1933.)

14. *Caïus Iacob* Sur quelques propriétés de la solution général d'une problème de MM. *H. Villat* et *R. Thiry.*

15. *Caïus Iacob.* Sur quelques problèmes généralisés de *Dirichlet-Neumann* pour les aires multiplements connexes. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. 198, juin 1934.)

PROBLEME REZOLVATE

334. — *Se dau patru cercuri* O_1, O_2, O_3, O_4; *să se construiască un al cincilea cerc* O_5, *astfel ca axele radicale ale cercului* O_5 *cu fie-care din primele patru, să formeze un trapez isoscel.*

ION PROTOPOPESCU

Această problemă este cuprinsă în problema 1626 propusă în „Gazeta Matematică", Vol. XVI, tot de d-l *I. Protopopescu* cu următorul enunț:

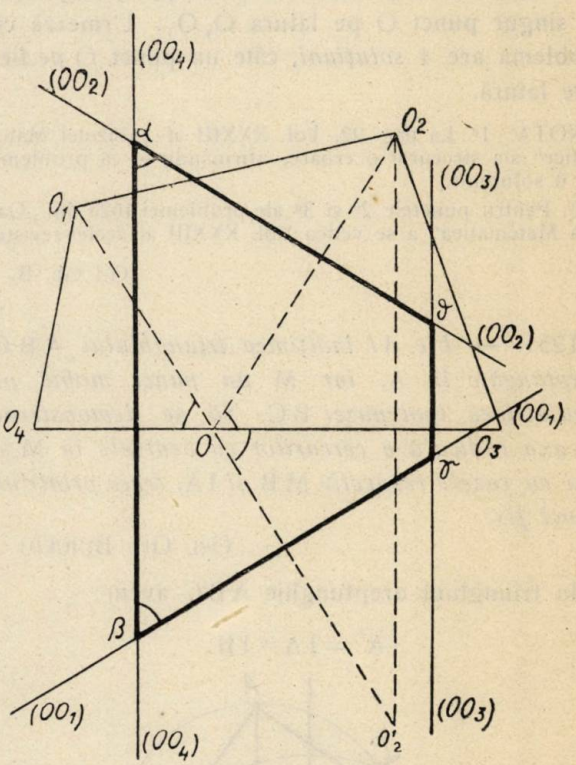
Fiind date patru cercuri în plan, să se construiască un al cincilea, astfel ca axele lui radicale cu fie-care din celelalte patru să formeze un trapez isoscel în care:

1°. *bazele sunt într'un raport dat,*

2°. *trei laturi sunt egale între ele.*

Soluția problemei 1626 din „Gazeta Matematică" a fost dată la pag. 20, Vol. XXXIII al acelei reviste.

Inprumutăm din acea soluție partea necesară pentru a rezolvi problema 334.



Fie O centrul cercului căutat și $(O_a O_b)$ axa radicală a cercurilor cu centrele în O_a, O_b. Figura $\alpha\beta\gamma\delta$ formată de cele 4 axe radicale fiind un trapez are 2 laturi, de exemplu $(O O_4)$ și $(O O_3)$ paralele. Cum aceste laturi sunt perpendiculare respectiv pe $O O_4$ și $O O_3$ urmează că O se găsește pe linia $O_4 O_3$.

Pentru ca trapezul $\alpha\beta\gamma\delta$ să fie isoscel, este necesar și suficient ca unghiurile $\delta\alpha\beta$, $\gamma\beta\alpha$ să fie egale. Dar prin construcție $(O O_2) \perp O O_2$ și $(O O_4) \perp O_4 O_3$, deci:

(1) $\sphericalangle \delta\alpha\beta = \sphericalangle O_2 O O_3$.

La fel $(O O_1) \perp O O_1$ şi:

(2) $\sphericalangle \gamma\beta\alpha = \sphericalangle O_4 O O_1$.

Din (1) şi (2) rezultă ca $O O_1$, $O O_2$ sunt simetrice faţă de $O_4 O_3$, de unde urmează următoarea construcţie pentru O:

Se ia simetricul O_2' a lui O_2 faţă de $O_4 O_3$ sau simetricul O_1' al lui O_1 faţă de $O_4 O_3$. *Punctul se găseşte la intersecţia lui* $O_4 O_3$ *cu* $O_1 O_2'$ *sau* $O_2 O_1'$, ceiace e tot una.

Cercul O poate să aibă ori ce rază.

Se observă că plecând de la O_1 şi O_2 se găseşte un singur punct O pe latura $O_4 O_3$. Urmează că problema are 4 *soluţiuni,* câte un punct O pe fiecare latură.

NOTĂ. 1°. La pag. 22, Vol. XXXIII al „Gazetei Matematice" s-a strecurat o eroare, afirmându-se că problema are 6 soluţiuni.

2°. Pentru punctele 2° şi 3° ale problemei 1626 din „Gazeta Matematică" a se vedea Vol. XXXIII al acelei reviste.

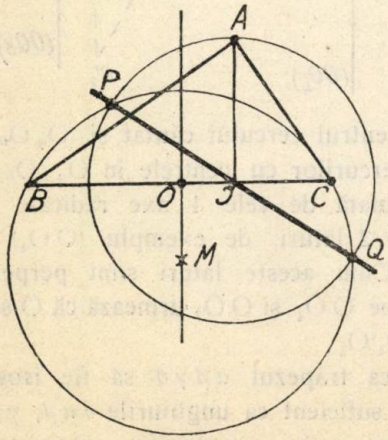
G-l Gh. B.

1251. — *Fie AI înălţimea triunghiului* A B C *dreptunghic în* A, *iar* M *un punct mobil pe mediatricea ipotenuzei* B C. *Să se demonstreze că axa radica'ă a cercurilor cu centrele în* M *şi* I *şi cu razele respectiv* M B *şi* I A, *trece printr'un punct fix.*

G-L Gh. BUICLIU

In triunghiul dreptunghic A B C avem:

(1) $\overline{IA}^2 = IA \times IB$.



$\overline{IA}^2$ este tocmai puterea lui I faţă de cercul I(I A). Cercul M(M B) trece evident prin C, aşa că puterea lui I faţă de acest cerc este:

(2) $p = IA \times IB = \overline{IA}^2$.

Se deduce că punctul fix I are aceiaşi putere faţă de cercurile I(I A) şi M(M B), deci se găseşte pe axa radicală a celor două cercuri, ceia-ce demonstrează problema.

NOTĂ. 1°. Au dat această soluţie d-nii: *P. V. Cazanacli* (Iaşi), *D-tru Ionescu* (lic. Milit. N. Filipescu), *M. L. A. Negrea* (Brăila) şi *I. Gh. Şabac* (lic. Milit. N. Filipescu).

2°. D-nii *I. Gh. Şabac* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *I. I. Săndulescu* (Şc. Politechnică, Timişoara) au considerat cazul mai general, când I este un punct fix oare-care pe ipotenuza B C şi M un punct mobil pe o dreaptă Δ ce trece prin mijlocul lui B C.

3°. Au dat foarte bune soluţii analitice d-nii: *Cons. Budeanu* (Şc. Polit., Bucureşti), *P. V. Cazanacli* (Iaşi) şi *M. I. Predoescu* (student).

4°. Se vede că I este centrul radical al cercurilor A B C, I (I A) şi M (M B) Se deduce imediat că problema 1251 este o aplicaţie a următoarei probleme generale: *Un cerc mobil* (I) *trece prin punctele fixe* A, B, *iar un cerc* (M) *trece printr-un punct fix C şi are centrul mobil pe o dreaptă* Δ *trecând prin centrul cercului* A B C. *Axa radicală a cercurilor* (I) *şi* (M) *trece printr-un punct fix.*

In adevăr: (M) trece prin C' simetricul lui C faţă de Δ. Dreptele A B, C C' sunt axele radicale ale cercului A B C cu (I) şi cu (M) şi se întâlnesc în centrul radical al celor trei cercuri.

G-l Gh. B.

1339. — *O persoană, care are două coşuleţe unul cu mere şi altul cu nuci, împarte aceste fructe la trei copii.*

Primul copil primeşte jumătate din numărul merelor şi încă o jumătate de măr, precum şi $\frac{1}{3}$ *din numărul nucilor. După ce aruncă un măr şi două nuci stricate din cele rămase în coşuleţe, se dă copilului al doilea,* $\frac{1}{3}$ *din numărul merelor rămase şi* $\frac{1}{2}$ *din numărul nucilor rămase. După aceasta, merele şi nucile rămase în coşuleţe, le ia cel de al 3-lea copil, care observă că are cu 5 mai multe nuci decât mere. Ştiind că numărul merelor luate de primii doi copii, întrece cu unul numărul nucilor luate de al 3-lea copil, se cere să se afle, câte nuci şi câte mere au primit fiecare din cei 3 copii.*

V. ALACI

Fie x numărul merelor şi y numărul nucilor din cele două coşuleţe, la început.

Primul copil primeşte conform enunţului:

$$(1)\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}\text{, mere şi }\frac{y}{3}\text{, nuci.}$$

In coşuleţe au rămas după aruncarea mărului şi a celor două nuci stricate:

$$\frac{x}{2}-\frac{1}{2}-1=\frac{x-3}{2}\text{, mere şi }\frac{2y}{3}-2=\frac{2y-6}{3}\text{, nuci.}$$

Al 2-lea copil primeşte conform enunţului:

$$(2)\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{x-3}{2}=\frac{x-3}{6}\text{, mere şi }\frac{1}{2}\cdot\frac{2y-6}{3}=\frac{y-3}{3}\text{, nuci.}$$

In coşuleţe au rămas acum:

$$(3)\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{x-3}{2}=\frac{x-3}{3}\text{, mere şi }\frac{y-3}{3}\text{, nuci,}$$

care formează partea celui de al 3-lea copil.

Cel de al 3-lea copil având cu 5 mai multe nuci de cât mere, iar numărul merelor primilor 2 copii fiind cu unul mai mult ca numărul nucilor copilului al 3-lea, acestea se traduc respectiv prin relaţiile:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{3}+5=\dfrac{y-3}{3} \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-3}{6}=\dfrac{y-3}{3}+1\text{,} \end{cases}$$

care ne dă sistemul de ecuaţii a problemei.

Aducând sistemul (4) la formă întreagă şi simplificând, obţinem:

$$(5)\quad \begin{cases} y-x=15 \\ 2x-y=0\text{.} \end{cases}$$

Rezolvind acest sistem, găsim sistemul de soluţii:

$$(6)\quad \begin{cases} x=15 \\ y=30\text{.} \end{cases}$$

Rezultă dar, că în coşuleţe au fost la început respectiv, 15 mere şi 30 nuci.

Inlocuind valorile din (6) în expresiile (1), (2) şi (3), găsim că cei 3 copii au primit respectiv:

Primul: 8 mere şi 10 nuci
al 2-lea: 2 „ şi 9 „
al 3-lea: 4 „ şi 9 „

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Apostol Gh. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Boitan P. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Burghelea Crăeşteanu* (lic. Milit, Cernăuţi), *Buzincu Ioan* (lic. Milit, Iaşi), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Cristea Emilian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Dragomirescu T. Ilie* (lic. Milit., Craiova), *Dumitrescu A. Valeriu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Enăsescu D. Dumitru Victor* (lic. Milit., Iaşi), *Floareş I. Adrian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Florescu Gh. Haralambie* (Gorj), *Florescu L. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Grigore M. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. Artilerie), *Hompola Tiberiu* (lic. Beiuş), *Hortopan Gh. Grigorie*, *Isac C. Dumttru* (lic. Milit., Iaşi), *Isac S. Victor* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Lazăr Aurel* (lic. Milit., Cernăuţi), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Matei D. Vasile* (lic. Milit, Tg.-Mureş), *Măgală I. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Moroz Sigismund* (Şc. de Conduct. şi Archit.), *Mosora Nicolae* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila), *Nedelcu V. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Opran C. Robăneşti* (lic. Milit., Cernăuţi), *Panait Mircea* (Şc. Of. Artilerie), *Pană Petre* (lic. Milit., N. Filipescu), *Paraschivescu Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa C. Benone* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Rennert Berthold* (Şc. de Cond. şi Arch.), *Secară Anton* (lic. Milit., Cernăuţi), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stănciulescu Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Surmei I. Mihai* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Toma N. Nicolae* (lic. Milit., Tg.-Mureş).

Observare: S'au primit încă multe soluţii greşite, care nu le înregistrăm.

Soluţia autorului. Fie x numărul merelor şi $x+5$ numărul nucilor luate de al 3-lea copil, care a observat că are cu 5 mai multe nuci de cât mere. Să ne întrebăm acum: câte mere şi nuci au fost în coşuleţe când a venit rândul celui de al 2-lea copil? Au fost atâtea, că după ce al 2-lea ia $\frac{1}{3}$ din numărul merelor şi $\frac{1}{2}$ din numărul nucilor, au rămas x mere şi $x+5$ nuci. Rezultă că în coşuleţe au fost:

$$\frac{3x}{2}\text{, mere şi } 2x+10\text{, nuci,}$$

iar al 2-lea a luat: $\frac{x}{2}$, mere şi $x+5$, nuci.

Adaogând mărul şi cele 2 nuci stricate, avem:

$$\frac{3x}{2}+1=\frac{3x+2}{2}\text{, mere, şi } 2x+12 \text{ nuci,}$$

care sunt respectiv numărul de mere şi nuci rămase

în coşuleţe, imediat după ce primul şi-a luat partea. Acum ne punem iarăşi intrebarea : câte mere şi nuci au fost în coşuleţe, ca luând primul $\frac{1}{2}$ din numărul merelor plus $\frac{1}{2}$ de măr şi $\frac{1}{3}$ din numărul nucilor, să rămână : $\frac{3x+2}{2}$, mere şi $2x+12$, nuci?

Răspunsul este : au fost :

$$3x+3, \text{ mere şi } 3x+18, \text{ nuci,}$$

iar primul a luat :

$$\frac{3x+4}{2}, \text{ mere şi } x+6, \text{ nuci.}$$

Acum, scriind că numărul merelor primite de primii 2 copii, întrece cu 1 numărul nucilor luate de al 3-lea copil, avem ecuaţia :

$$\frac{3x+4}{2}+\frac{x}{2}=x+5+1,$$

care rezolvată, ne dă :

$$x=4.$$

Deci al 3-lea copil a primit : 4 mere şi 9 nuci.
Al 2-lea copil a primit :

$$\frac{x}{2}=\frac{4}{2}=2, \text{ mere şi } x+5=4+5=9, \text{ nuci.}$$

Primul copil a primit :

$$\frac{3x+4}{2}=\frac{3\times 4+4}{2}=8, \text{ mere şi } x+6=4+6=10, \text{ nuci.}$$

1348. — *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} xy(2x^2-3y^2)+50=0 \\ (2x^2+3y^2)^2+3xy=115 \end{cases}$$

M. AMARASTEANU

Observând că :

$$(2x^2+3y^2)^2=(2x^2-3y^2)^2+24x^2y^2,$$

şi notând pentru prescurtare :

$$(1) \qquad xy=u, \qquad 2x^2-3y^2=v,$$

sistemul dat devine :

$$(2) \qquad \begin{cases} uv^2+50=0 \\ v^2+24u^2+3u=115 \end{cases}$$

Din prima ecuaţie din (2), avem :

$$(3) \qquad v^2=-\frac{50}{u},$$

pe care înlocuind'o în a 2-a ecuaţie din (2), găsim :

$$-\frac{50}{u}+24u^2+3u=115$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad (4) \qquad 24u^3+3u^2-115u-50=0.$$

Fiindcă primul membru din (4) se anulează pentru $u=-2$, el se divide prin $u+2$ şi calculând câtul, găsim că ecuaţia (4) se mai poate scri astfel :

$$(u+2)(24u^2-45u-25)=0.$$

Rezolvind această ecuaţie, avem :

$$u_1=-2, \qquad u_2=\frac{45+5\sqrt{177}}{48}=A,$$

$$u_3=\frac{45-5\sqrt{177}}{48}=B.$$

Inlocuind aceste valori în (3), găsim valorile corespunzătoare pentru v şi deci sistemul (2) admite următoarele sisteme de soluţii :

$$\begin{cases} u_1=-2 \\ v_1=\pm 5 \end{cases} \quad \begin{cases} u_2=A \\ v_2=\pm i\sqrt{\frac{50}{A}} \end{cases} \quad \begin{cases} u_3=B \\ v_3=\pm i\sqrt{\frac{50}{B}} \end{cases}$$

Aceste sisteme de valori pentru u, v înlocuite pe rând în (1), ne dau :

$$(5) \begin{cases} xy=-2 \\ 2x^2-3y^2=\pm 5 \end{cases} \qquad (6) \begin{cases} xy=A \\ 2x^2-3y^2=\pm i\sqrt{\frac{50}{A}} \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} xy=B \\ 2x^2-3y^2=\pm\sqrt{\frac{50}{B}} \end{cases}$$

Rămâne să rezolvim pe rând aceste sisteme de ecuaţii.

Din prima ecuaţie din (5), avem :

$$(8) \qquad y=-\frac{2}{x},$$

pe care înlocuind'o în a 2-a ecuaţie din (5), obţinem :

$$2x^2-\frac{12}{x^2}=\pm 5$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \qquad 2x^4\mp 5x^2-12=0.$$

Rezolvind această dublă ecuaţie bipatrată, găsim :

$$x=\pm\sqrt{\frac{\pm 5\pm\sqrt{121}}{4}}=+\sqrt{\frac{\pm 5\pm 11}{2}}.$$

Aceste 8 valori pentru x, înlocuite în (8) ne dau valorile corespunzătoare pentru y, astfel că sistemul (5) admite următoarele 8 sisteme de soluţii :

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \dfrac{i\sqrt{6}}{2} \\ y_3 = -\dfrac{4}{i\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = -\dfrac{i\sqrt{6}}{2} \\ y_4 = \dfrac{4}{i\sqrt{6}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_5 = \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y_5 = -\dfrac{4}{\sqrt{6}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_6 = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y_6 = \dfrac{4}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_7 = 2i \\ y_7 = -i \end{cases} \qquad \begin{cases} x_8 = -2i \\ y_8 = i \end{cases}$$

Analog se rezolvă sistemele de ecuaţii (6) şi (7).

Soluţii bune date de d-nii: *Andrunachievici V.* (lic. Chişinău), *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie) şi *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş).

Au găsit numai unele sistemele de soluţii, d-nii: *Godeanu. Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (Şc. Of. de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş) şi *Popa Nicolae* (lic. Beiuş).

1358. — *h', h'', h''' fiind segmentele de înălţimi cuprinse între vârf şi ortocentru, iar h_1, h_2, h_3 porţiunile rămase din aceleaşi înălţimi, să se arate că:*

$$\Sigma\, h'\, h_1 \left(\frac{1}{h''\, h_2} + \frac{1}{h'''\, h_3} \right) = 6.$$

MIRCEA POSTELNICESCU

Fie AA_1, BB_1, CC_1 înălţimele unui triunghiu oarecare ABC, care se întâlnesc în H. Conform enunţului avem:

$$AH = h' \qquad HA_1 = h_1$$
$$BH = h'', \qquad HB_1 = h_2$$
$$CH = h''', \qquad HC_1 = h_3.$$

In patrulaterul inscriptibil $AB A_1 B_1$, coardele AA_1, BB_1 trecând prin H, după o teoremă cunoscută putem scri:

$$h''\, h_2 = h'\, h_1$$

şi analog:

$$h'''\, h_3 = h'\, h_1.$$

In virtutea acestor două relaţiuni, primul membru al relaţiei din enunţ devine succesiv:

$$\sum h'\, h_1 \left(\frac{1}{h''\, h_2} + \frac{1}{h'''\, h_3} \right) = \sum h'\, h_1 \left(\frac{1}{h'\, h_1} + \frac{1}{h'\, h_1} \right)$$

$$= \sum \frac{2\, h'\, h_1}{h'\, h_1} = \sum 2 = 6.$$

Avem astfel stabilită relaţia cerută.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (Craiova), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dulămiţă Gr. Ioan* (lic Milit., Craiova), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chişinău), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie), *Grumăzescu Mircea* (Şc. Of. de Artilerie), *Ionescu D.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Marţian V. Murgu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău), *Mitache I. Anton* (lic. Milit., Chişinău), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuţi), *Stefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Ţiţeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

1394.[1] — *Dacă între numerile prime între ele,* A, B, C *există relaţiunea:*

$$A^2 = B^2 - C^2,$$

atunci numerile $B \pm C$ *sau* $\dfrac{B+C}{2}$ *sunt patrate perfecte.*

G-L GH. BUICLIU

Punând relaţia dată sub forma:

$$A^2 + C^2 = B^2,$$

se vede imediat că A, C, B sunt soluţiunile întregi ale ecuaţiei:

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

în care x, y, z sunt prime între ele, şi se ştie (a se vedea bună oară articolul d-lui *G. Ţiţeica* din „Gazeta Matematica" Vol. XIV, pag. 65) că aceste soluţiuni sunt:

(1) $A = p^2 - q^2$; $\quad C = 2pq$; $\quad B = p^2 + q^2$,

când p şi q sunt de parităţi diferite, sau:

(2) $\quad A = \dfrac{p^2 - q^2}{2}$; $\quad C = pq$, $\quad B = \dfrac{p^2 + q^2}{2}$

când p şi q sunt fără soţ, p şi q fiind doi întregi oare-care.

Se vede că în cazul (1):

$$B \pm C = (p \pm q)^2,$$

iar în cazul (2):

$$\frac{B \pm C}{2} = \left(\frac{p \pm q}{2} \right)^2.$$

NOTĂ. 1°. Am compus problema 1394 pentru a stimula corespondenţii să dea soluţii la problema 1386, care prezintă dificultăţi serioase. In enunţul problemei 1394, publicat la pag. 48, Vol. XV, s-a omis a se publica *„prime între ele"* şi $\dfrac{B \pm C}{2}$. Omisiunea primei părţi a fost observată imediat şi s-au primit propuneri de rectificări după cum urmează:

[1]) Enunţ complectat.

D-nii *G. G. Constantinescu* şi Prof. *E. Vişa* propun a se schimba concluzia enunţului în senzul că sumele respective sunt *„multipli de patrate perfecte"*.

D-l Prof. *V. Cazanacli* propune rectificarea, aşa cum e publicat enunţul din numărul de faţă.

2°. D-l Prof. *V. Cazanacli* face cunoscut că problema e publicată în „Leçons d'Arithmetique" de *J. Tannery* sub enunţul *„Dacă a, b sunt numere prime între ele, a^3+b^3 nu poate fi patrat de cât, dacă $a-b$, $a+b$ este patrat sau dublul unui patrat"*.

Se vede însă că problema din *J. Tannery* este reciproca problemei 1394, care din cauza simplicităţei ei, e foarte posibil să mai fie deja publicată unde-va.

PROBLEME PROPUSE

1441. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre însemnătoare, ştiind că are cifra a doua şi ultimă identice, iar suma lor este prima cifră a patratului căutat.

DUMITRU D. MATEI

1442. — Notând prin $\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)$ restul împărţirei numerelor întregi pozitive m şi n, în ordinea scrisă, să se arate că relaţia:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m}{n}\right)=1,$$

reprezintă condiţia necesară şi suficientă pentru ca relaţia:

$$\mathcal{R}\left(\frac{m^x}{n}\right)=1,$$

să fie o identitate în raport cu x întreg şi pozitiv.

EUGEN VISA

1443. — Dacă un număr N se împarte în părţile, $x_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ proporţionale cu cifrele $a_i\ (i=1,2,\ldots,n)$, atunci avem relaţia:

$$N^2=\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} 10^i x_i$$

ION C. SCHILERU

1444. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3+y^3+x^3y^3+3xy(x+y)=a \\ x^3y(y+1)+y^3x(x+1)+2x^2y^2=b \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1445. — Se dă paralelogramul ABCD şi un punct O din plan. Se duce D D′ paralel cu AO până taie pe AC în D′. Triunghiurile ABO şi CD′O sunt echivalente.

N. N. MIHAILEANU

1446. — Se dă patrulaterul ABCD. Se cere să se ducă prin vârfurile alăturate A, B dreptele Δ şi Δ_1 perpendiculare între ele şi care să determine pe CD în prelungire, segmentele CE şi DF egale între ele.

Să se cerceteze cazul când ABCD este un dreptunghiu.

V. ALACI

1447. — Se dă un cerc O de rază $R=2$. Din punctele P şi M coliniare cu O se duc tangentele PA şi MB, astfel ca proecţia razei OA pe OP, $OA'=\sqrt{2}$; iar proecţia razei OA pe OB, $OA''=\sqrt{3}$.

Se cere:

1°. Distanţa PM între cele două puncte.

2°. Lungimele PN şi MN ale tangentelor, N fiind punctul lor de intersecţie.

MIHAIL BOTEZ

1448. — Să se stabilească următoarea relaţie:

$$\sum \frac{(p-a)^2}{bc}=\frac{2R-r}{2R},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

LOCOT. C. D. IONESCU-ŢIU

ERATĂ. 1. In „R. M T", anul I, pag. 73, rândul 20 de sus din dreapta, se va scrie:

$$84=7\times 12=2\times 7\times(7-1),$$

în locul egalităţei greşite:

$$84=7\times 14=2\times 7\times 7.$$

I. I.

2. In numărul trecut al „R. M. T" se vor face următoarele rectificări.

1°. Pag. 98, coloana 2ª, primul rând, după al 2lea semn de egalitate, se va ceti:

$\mathcal{R}\left(\frac{m^q}{n}\right)$, în loc de: $\left(\frac{m^q}{n}\right)$.

2°. Pag. 98, coloana 2ª rândul 5 de jos, se va ceti:

$\mathcal{R}\left[\frac{m'^q(\Pi\lambda_i)^q}{n}\right]$, în loc de: $\mathcal{R}\left[\frac{m^2(\Pi\lambda_i)^q}{n}\right]$.

3°. Pag. 99, în tabloul care dă valorile lui p, patratul $\left[\frac{m}{n}\right]$, care intervine de două ori, se va înlocui prin $\left[\frac{m}{n}\right]$

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25 fr.**
Etranger, 7 **belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XIV, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru :

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL VII-LEA

costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toți cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în considerație, sunt obligați a fi abonați la Revista Matematică din Timișoara.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) și se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Școalei Politechnice, Timișoara.

ANUL XV. 15 IANUARIE 1936 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. THÉBAULT: SUR LE POINT DE FEUERBACH.
2. GH. CONSTANTINESCU: PATRATE REMARCABILE.
3. NOTE MATEMATICE: 20.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 882, 976, 1128, 1293, 1302, 1347, 1360, 1361, 1362.
6. PROBLEME PROPUSE: 1449-1456.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institutul de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând dela 15 Ianuarie 1936, mai fac parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara şi d-nii profesori:

1⁰. *Stamatescu I.* Profesor la liceul „Mateiu Basarab" şi Seminarul Pedagogic Universitar, Strada Toamnei 47, Bucureşti.

2⁰. *Haralamb P. Ionescu-Biss,* licenţiat în Matematici, Profesor, Oltenita.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XIV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR LE POINT DE FEUERBACH

par V. THÉBAULT
le Mans (France)

1. Etant donné un triangle A B C, soient A_m, B_m, C_m les milieux des côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; O et I les centres des cercles circonscrit et inscrit, de rayons R, r; φ le point de contact des cercles inscrit et des neuf points; S l'aire du triangle.

Si l'on pose $OI = d$, on a les relations connues:

$$(1)\quad \varphi A_m = \frac{R(b-c)}{2d}, \quad \varphi B_m = \frac{R(a-c)}{2d},$$
$$\varphi C_m = \frac{R(a-b)}{2d},$$

et les aires algébriques S_a, S_b, S_c des triangles $\varphi B_m C_m$, $\varphi C_m A_m$, $\varphi A_m B_m$ s'expriment:

$$(2)\quad S_a = \frac{1}{2}\varphi C_m \cdot \varphi B_m \cdot \sin A = \frac{a(a-b)(a-c)}{16(R-2r)},$$
$$S_b = \frac{b(b-c)(b-a)}{16(R-2r)}, \quad S_c = \frac{a(c-a)(c-b)}{16(R-2r)}.$$

Dès lors, on a:

$$(3)\quad \frac{a}{S_a}+\frac{b}{S_b}+\frac{c}{S_c} = 16(R-2r)\sum\frac{1}{(a-b)(a-c)} \equiv 0$$

$$(4)\quad \frac{a^2}{S_a}+\frac{b^2}{S_b}+\frac{c^2}{S_c} = 16(R-2r)\sum\frac{a}{(a-b)(a-c)} \equiv 0$$

$$(5)\quad \frac{a^3}{S_a}+\frac{b^3}{S_b}+\frac{c^3}{S_c} = 16(R-2r)\sum\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} \equiv$$
$$16(R-2r)$$

$$(6)\quad \frac{a^4}{S_a}+\frac{b^4}{S_b}+\frac{c^4}{S_c} = 16(R-2r)\sum\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} \equiv$$
$$32p(R-2r)$$

$$(7)\quad \frac{a^5}{S_a}+\frac{b^5}{S_b}+\frac{c^5}{S_c} = 16(R-2r)\sum\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} \equiv$$
$$16(R-2r)[(a+b+c)^2-(bc+ca+ab)] \equiv$$
$$16(R-2r)[3p^2-r(4R+r)]$$

$$(8)\quad \frac{1}{S_a}+\frac{1}{S_b}+\frac{1}{S_c}16 = (R-2r)\sum\frac{1}{a(a-b)(a-c)} =$$
$$\frac{16(R-2r)}{abc} \equiv \frac{4(R-2r)S}{R}$$

$$(9)\quad \frac{1}{aS_a}+\frac{1}{bS_b}+\frac{1}{cS_c} =$$
$$16(R-2r)\sum\frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} \equiv$$
$$16(R-2r)\left[\frac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}\right] \equiv$$
$$\frac{(R-2r)(p^2+r^2+4Rr)}{R^2S^2}.$$

2. On a aussi:

$$(10)\quad S_a + S_b^* + S_c \equiv \frac{1}{4}S$$

$$(11)\quad S_a^2+S_b^2+S_c^2 = \sum\left[\frac{a(a-b)(a-c)}{16(R-2r)}\right]^2 =$$
$$\sum\left[\frac{(b-c)^2(p-a)}{16(R-2r)}\right]^2 = \frac{S^2}{16}\ ^{1)}$$

$$(12)\quad S_bS_c + S_cS_a + S_aS_b \equiv 0.$$

3. Remarques. 1° Si l'on porte sur les côtés B A et C A, C B et A B, A C et B C des segments $AM_a = BC = AN_a$, $BM_b = CA = BN_b$, $CM_c = AB = CN_c$, les aires algébriques S'_a, S'_b, S'_c des triangles AM_aN_a, BM_bN_b, CM_cN_c ont pour expressions:

[1]) Nous avons signalé les relations:
$\Sigma[a(a-b)(a-c)]^2 = \Sigma[(b-c)^2(p-a)]^2 = [4S(R-2r)]^2$,
dans *Gazeta Matematica*, XL—437. (V. T.)

$$S'_a = \frac{1}{2} A N_a \cdot A M_a \sin A = \frac{1}{4R} a(a-b)(a-c)$$

(13)

$$S'_b = \frac{1}{4R} b(b-c)(b-a),\ S'_c = \frac{1}{4R} c(c-a)c-b),$$

$$\frac{1}{S'_a} + \frac{1}{S'_b} + \frac{1}{S'_c} = \frac{1}{S} \tag{14}$$

$$\frac{1}{a S'_a} + \frac{1}{b S'_b} + \frac{1}{c S'_c} = \tag{15}$$

$$4R \sum \frac{1}{a^2(a-b)(a-c)} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4RS^2}.$$

2°. Dans le triangle $A_m B_m C_m$, la distance x du point φ au côté $B_m C_m$, par exemple, s'exprime:

$$x = \frac{\varphi B_m \cdot \varphi C_m}{R} = \frac{(a-b)(a-c)}{4(R-2r)}.$$

Les coordonnées normales du point φ et de son conjugué isogonal φ' pour le triangle $A_m B_m C_m$ sont donc:

$$(a-b)(a-c),\ (b-c)(b-a),\ (c-a)(c-b),$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)},\ \frac{1}{(b-c)(b-a)},\ \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

On en conclut d'abord que φ' est situé à l'infini sur l'axe antiorthique Δ du triangle $A_m B_m C_m$, puis, en vertu de (4), que le point de coordonnées normales:

$$\frac{a^2}{S_a},\ \frac{b^2}{S_b},\ \frac{c^2}{S_c},$$

par rapport à $A_m B_m C_m$, appartient aussi à Δ.

N. B. Le point φ étant le foyer de la parabole de directrice O I inscrite au triangle $A_m B_m C_m$, son conjugué isogonal φ', dans ce triangle, est à l'infini dans la direction parallèle á l'axe de cette parabole, c'est-à-dire sur une perpendiculaire à O I. On retrouve ainsi cette propriété classique:

Dans un triangle, l'axe antiorthique est perpendiculaire à la droite des centres des cercles inscrit et circonscrit.

PATRATE REMARCABILE

DE

GH. CONSTANTINESCU

PROFESOR

D-nul *Thébault* numeşte patrate remarcabile, acele patrate cari împărţite în grupe de 3 cifre dela dreapta, fie-care grupă este un patrat perfect.

D-sa dă în „G. M.", anul XL, No. 3 multe exemple de aceste patrate şi în cele ce urmează voi arăta cum se găsesc toate aceste patrate de 4, 5, 6, 7, 8 şi 9 cifre.

I. Pentru a avea asemenea patrate, trebue să găsim toate patratele ale căror ultime 3 cifre formează ele însuşi un patrat perfect.

E deajuns să căutăm patratul numerilor de 3 cifre, cari se bucură de asemenea proprietăţi, căci odată găsite acestea, putem adăoga la stânga lor orce număr şi numărul astfel format se va bucura de aceleaşi proprietăţi.

1. Toate numerile terminate cu 5 au patratele lor, cari răspund la această chestiune. In adevăr avem:

$$u = 10x + 5,$$

deci:

$$u^2 = 100x(x+1) + 25,$$

or produsul a 2 numere consecutive nu se termină decât cu 0, 2 sau 6 şi deci u^2 se termină cu 025,225 sau 625 cari toate sunt patrate perfecte.

2. Numerile cari se termină cu 10, 20, 30, 70, 80 şi 90, au patratele terminate cu 100, 400 şi 900, deci respund problemei noastre.

3. Să găsim acum şi celelalte soluţiuni, cari nu se termină cu 0 sau 5.

Patratele acestor numere se pot pune sub forma următoare:

$$u^2 = v^2 + 1000p, \quad \text{unde} \quad \begin{matrix} u < 1000 \\ v < 32 \\ p < 1000 \end{matrix}$$

sau:

$$u^2 - v^2 = 1000p$$

$$u + v = 2^\alpha 5^\beta p_1,$$

de unde:

$$u - v = 2^{\alpha'} 5^{\beta'} p_2$$

unde:

$$\alpha + \alpha' = 3$$
$$\beta + \beta' = 3,$$

de unde deducem:

$$u = 2^{\alpha-1} 5^{\beta} p_1 + 2^{\alpha'-1} 5^{\beta'} p_2$$
$$v = 2^{\alpha-1} 5^{\beta} p_1 - 2^{\alpha'-1} 5^{\beta'} p_2.$$

Cum eliminăm valorile lui u, cari se împart cu 5 de oarece le-am găsit mai sus, avem:

(1) $u = p_1 + 250 p_2$, $v = p_1 - 250 p_2$ (2) $u = 2p_1 + 125 p_2$, $v = 2p_1 - 125 p_2$

(3) $v = 250 p_1 - p_2$, $u = 250 p_1 + p_2$ (4) $u = 125 p_1 + 2 p_2$, $v = 125 p_1 - 2 p_2$.

Din acestea deducem valoarea lui u şi găsim:

$$u = 500 m \pm v$$
$$u = 500 m + 251 v$$
$$u = 500 m - 249 v.$$

Dăm lui v toate valorile de la 1 până la 31 inclusiv, iar lui m îi dăm valori pozitive sau negative astfel ca valoarea lui u să fie mai mică ca 1000 şi găsim că următoarele numere satisfac acestei chestiuni.

1) Numerile de la 1 până la 31.
2) Numerile impare între 219 şi 281 inclusiv.
3) Numerile între 469 şi 531 inclusiv.
4) Numerile impare între 719 şi 781 inclusiv.

II Patrate remarcabile de 4, 5 şi 6 cifre.

Aceste patrate se pot pune sub forma:

$$u^2 = 10000 a^2 + b^2 \quad \text{unde} \quad a < 32, \; b < 32.$$

Toate soluţiile acestei probleme, trebuesc căutate printre soluţiile problemei I.

1. Să căutăm cari numere terminate cu 5 satisfac aceste probleme.

Avem:

$$u = 100 x + 10 y + 5,$$

de unde:

$$u^2 = 10000 x^2 + 1000 x (2y + 1) + 100 y (y+1) + 25$$

In acest caz b^2 nu poate să fie de cât 025,225, sau 625.

Să luăm de exemplu cazul când $b^2 = 225$.

In acest caz y va fi egal cu 1, 3, 6 sau 8 şi deci pentru u^2 va corespunde:

$$10x^2 + 3x, \quad 10x^2 + 7x + 1, \quad 10x^2 + 13x + 4,$$
$$10x^2 + 17x + 7.$$

Dăm lui x valorile cuprinse între 0 şi 9 şi ţinând seama de ultima cifră cu cari se termină un patrat perfect, găsim 3 soluţii:

$$35^2 = 1225, \quad 65^2 = 4225, \quad 285^2 = 81225.$$

Procedăm în acelaş mod în cazul când b^2 este egal cu 025 sau 625 şi mai găsim încă 2 soluţii:

$$95^2 = 9025 \quad \text{şi} \quad 475^2 = 225625.$$

2. In cazul când u se termină cu zero, b^2 nu poate fi decât 100, 400 sau 900 şi cum y nu poate fi decât 1, 2, 3, 7, 8 şi 9, urmează că vom avea pentru u^2 următoarele expresiuni:

$$10x^2 + x, \quad 10x^2 + 4x, \quad 10x^2 + 6x$$
$$10x^2 + 14x + 4, \quad 10x^2 + 16x + 6$$

şi $$10x^2 + 18x + 8.$$

Dăm în aceste expresiuni lui x valorile de la 0 până 9 şi ţinând seama de ultima şi penultima cifră cu care se termină un patrat perfect, găsim următoarele 5 soluţiuni:

$$70^2 = 4900, \quad 130^2 = 16900, \quad 190^2 = 36100,$$
$$380^2 = 144400 \quad \text{şi} \quad 570^2 = 324900.$$

3. In cazul când numerile sunt cuprinse 0 şi 31, găsim 31 soluţiuni cari sunt numai de 3 cifre, deci nu răspund chestiunei noastre.

4. Când u este impar şi este cuprins între 219 şi 281, vom avea:

$$47911 < u^2 < 78961,$$

urmează că:

$$47 < a^2 < 78,$$

deci a^2 nu poate fi decât 49 sau 64.

Să luăm primul caz $a^2 = 49$, urmează că:

$$49001 \leq u^2 \leq 49961,$$

de unde:

$$221{,}3 < u < 223{,}5.$$

Cum u este impar, urmează că $u = 223$, care este o soluţie, deci $u^2 = 49729$.

Când $a^2 = 64$, găsim în acelaş mod:

$$u^2 = 253^2 = 64009.$$

Când u este cuprins între 469 şi 531, găsim în acelaş mod 2 soluţiuni:

$$u^2 = 475^2 = 225625$$

$$u^2 = 506^2 = 256036.$$

Prima soluţie 475 trebue eliminată, căci s'a mai găsit odată, când am cercetat numerile cari se termină cu 5.

In cazul când avem:

$$719 \leqq u \leqq 781,$$

cercetând în acelaş mod, nu găsim nici o soluţie.

III. Patrate remarcabile de 7, 8 şi 9 cifre.

Ele se pot pune sub forma:

$$u^2 = 1000^2 a^2 + 1000 b^2 + c^2$$

unde a, b şi c sunt mai mici ca 32.

Deducem că u va fi de forma:

$$u = 1000 a + 100 x + 10 y + z.$$

Dacă în loc de b^2 punem valoarea sa cea mai mare 961 şi începem să extragem rădăcina patrată, găsim că pentru:

$a > 4$, x este zero,

pentru:

$a = 4$, x este 0 sau 1

$a = 3$, x este 0 sau 1

$a = 2$, x este 0, 1 sau 2

$a = 1$, x este 0, 1, 2, 3 sau 4.

1. Să luăm cazul când $x = 0$.

Şi aci deosebim două cazuri după cum:

$$10y + z < 32, \quad \text{sau} \quad > 32.$$

a. Când $10y + z < 32$, avem $c^2 = (10y + z)^2$ şi valoarea lui u^2 se poate scri:

$$u^2 = 1000^2 a^2 + 1000 b^2 + c^2 = 1000^2 a^2 + 2000 a (10y + z) + (10y + z)^2,$$

de unde deducem:

$$b^2 = 2a(10y + z).$$

Dăm lui a toate valorile dela 1 la 31 inclusiv şi alegem $10y + z$ în aşa mod, că înmulţit cu 2 a, să ne dea un patrat perfect mai mic ca 1000, găsim următoarele rezultate:

1) $1002^2 = 1004004$
2) $1008^2 = 1016064$
3) $1018^2 = 1036324$
4) $2001^2 = 4004001$
5) $2004^2 = 4016016$
6) $2009^2 = 4036081$
7) $2016^2 = 4064256$
8) $2025^2 = 4100625$
9) $3006^2 = 9036036$
10) $3024^2 = 9144576$
11) $4002^2 = 16016004$
12) $4008^2 = 16064064$
13) $4018^2 = 16144324$
14) $5010^2 = 25100100$
15) $6003^2 = 36036009$
16) $6012^2 = 36144144$
17) $6027^2 = 36324729$
18) $7014^2 = 49196196$
19) $8001^2 = 64016001$
20) $8004^2 = 64064016$
21) $8009^2 = 64144081$
22) $8016^2 = 64256256$
23) $8025^2 = 64400625$
24) $9002^2 = 81036004$
25) $9008^2 = 81144064$
26) $9018^2 = 81324324$

De 9 cifre:

27) $10005^2 = 100100025$
28) $10020^2 = 100400400$
29) $11022^2 = 121484841$
30) $12006^2 = 144144036$
31) $12024^2 = 144576576$
32) $13026^2 = 169676676$
33) $14007^2 = 196196049$
24) $14028^2 = 196784784$
35) $15030^2 = 225900900$
36) $16002^2 = 256064004$
37) $16008^2 = 256256064$
38) $16018^2 = 256324576$
39) $18001^2 = 324036001$
40) $18004^2 = 324144016$
41) $18009^2 = 324324081$
42) $18016^2 = 324576256$
43) $18025^2 = 324900625$
44) $20010^2 = 400400100$
45) $22011^2 = 484485121$
46) $24003^2 = 576144009$
47) $24012^2 = 576576144$
48) $25002^2 = 625100004$
49) $25008^2 = 625400064$
50) $25018^2 = 625900324$
51) $26013^2 = 676676169$
52) $27006^2 = 729324036$
53) $28014^2 = 784784196$
54) $30015^2 = 900900225$

b. Cazul $10y + z > 31$, atunci $10y + z$ nu pot fi de cât 35, 45, 55, 65, 70, 75, 80, 85, 90 şi 95.

Din valorile lui u^2 găsim:

$$1000 b^2 + c^2 = 2000 a (10x + y) + (10y + z)^2.$$

Inlocuim pe $10y + z$ cu valorile de mai sus, găsim:

$b^2 = 70a + 1$, $90a + 2$, $110a + 3$, $130a + 4$, $140a + 4$, $150a + 5$, $160a + 6$, $170a + 7$, $180a + 8$ şi $190a + 9$.

Din prima valoare a lui b^2 deducem că:

$$\frac{b^2 - 1}{70} = a.$$

Cum b nu poate fi mai mare ca 31 şi ca expresiunea $b^2 - 1$ să se termine cu zero, urmează că b nu poate fi decât 9, 11, 19, 21, 29, 31 şi cum $b^2 - 1$ trebue să se împartă şi cu 7, el trebue să fie de forma $m7 \pm 1$.

Din valorile lui b, numai 29 este un mult. $7 + 1$, care ne dă pentru a valoarea 12 şi deci avem soluţia:

$$12035^2 = 144481225.$$

Expresiunile lui b^2 egale cu $90a + 2$, $110a + 3$, $170a + 7$ şi $180a + 8$, nu le mai considerăm, căci acestea nu pot fi niciodată patrate perfecte, pentru că se termină cu 2, 3, 7 şi 8.

Din celelalte expresiuni ale lui b^2, mai găsim două soluţiuni:

$$1070^2 = 1144900$$
$$6065^2 = 36784225.$$

2. In acest caz x are valorile 1, 2, 3, 4.

Acest caz il sub-dividem în alte 4 cazuri, după cum z se termină cu 5 sau cu zero şi după cum:

$$219 \leqq 100x + 10y + z \leqq 281$$
$$469 \leqq 100x + 10y + z < 500.$$

a. Când $z = 5$, vom avea:

$$u^2 = 1000^2 a^2 + 200000 ax + 10000 [x^2 + a(2y+1)] +$$
$$1000x(2y+1) + 100y(y+1) + 25 =$$
$$1000^2 a^2 + 1000 b^2 + c.$$

Dăm în acestă egalitate lui y, toate valorile dela zero până la 10.

Să luăm cazul când $y = 1$, avem $c^2 = 225$ şi simplificând găsim:

$$b^2 = 200ax + 10(x^2 + 3a) + 3x.$$

Lui x trebue să-i dăm valorile 1, 2, 3, 4, însă pentru $x = 1$ şi 4, b^2 nu poate fi un patrat perfect, căci se termină cu 3 şi 2.

Pentru $x = 2$ găsim:

$$b^2 = 400a + 10(3a + 1) + 6.$$

Când $x = 2$, a nu poate fi decât 1 sau 2.

Inlocuind în b^2, găsim 476 şi 906, cari nu sunt patrate perfecte.

Pentru $x = 3$ găsim:

$$b^2 = 600a + 10(3a + 9) + 9$$

şi cum în acest caz a nu poate fi decât 1, găsim:

$$b^2 = 729 = 27^2,$$

deci avem soluţia:

$$1729225 = 1315^2.$$

Procedăm în acelaş mod pentru celălalte valori ale lui y şi găsim încă o soluţie:

$$1275^2 = 1625625.$$

b. Când $z = 0$, atunci u^2 va fi de forma:

$$u^2 = 1000^2 a^2 + 200000 ax + 10000(x^2 + 2ay) +$$
$$2000xy + 100y^2 = 1000^2 a^2 + 100b^2 + c^2.$$

Dăm lui y valorile 1, 2, 3, 7, 8, 9 şi găsim:

1) $c^2 = 100$, $b^2 = 200ax + 10(x^2 + 2a) + 2x$

2) $c^2 = 400$, $b^2 = 200ax + 10(x^2 + 4a) + 4x$

3) $c^2 = 900$, $b^2 = 200ax + 10(x^2 + 6a) + 6x$

4) $c^2 = 900$, $b^2 = 200ax + 10(x^2 + 14a) + 14x + 4$

5) $c^2 = 400$, $b^2 = 200ax + 10(x^2 + 16a) + 16x + 6$

6) $c^2 = 100$, $b^2 = 200ax + 10(x^2 + 18a) + 18x + 8$

Cum x şi a nu iau decât valori, cuprinse în tabloul din III, nu găsim nici o soluţie.

c. Când $219 \leqq 100x + 10y + z \leqq 281$.

In acest caz x fiind egal cu 2, urmează că a nu poate fi decât 1 sau 2, deci numerile nu pot fi cuprinse decât între:

$$1219 < u < 1281$$
$$2219 < u < 2281,$$

deci vom avea pentru u^2:

$$1485961 < u^2 < 1640961$$
$$4923961 < u^2 < 5202961.$$

Rezultă că b^2 nu poate fi decât:

$$b^2 = 529576625961.$$

Luăm cazul când $b^2 = 625$, urmează că:

$$1625001 < u^2 < 1625961,$$

deci:

$$1274{,}7 < u < 1275{,}1, \quad \text{deci} \quad u = 1275.$$

Soluţia ei s'a mai găsit în cazul $z = 5$.

Pentru celelalte valori a le lui b^2 nu găsim nici o soluţie.

d. Când $469 < 100x + 10y + z < 500$.

Procedăm şi în acest caz ca în cel precedent şi nu găsim nici o soluţie.

V. In acelaş mod se găsesc patrate remarcabile, când le-am împărţi în grupe de câte două cifre.

VI. Dăm câte-va exemple de patrate remarcabile mai mari:

$$4004009004004 = 2001002^2$$
$$14016036016016 = 4002004^2$$
$$144144324144144 = 12006012^2$$
$$196196441196196 = 14007014^2$$
$$256256576256256 = 16008016^2$$
$$324324729524324 = 18009018^2$$

NOTE MATEMATICE

20 — *Sur deux équations diophantiennes.*[1]

Sur le résolution de l'équation:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + y_4^4 + y_5^4$$

un nombres entiers.

Nous avons établi l'identité suivante:

$$(a+b+c+d)^4 + (a+b-c-d)^4 + (a-b-c+d)^4 + (a-b+c-d)^4 = (-a+b+c+d)^4 + (a-b+c+d)^4 + (a+b-c+d)^4 + (a+b+c-d)^4 + 192\ a\,b\,c\,d.$$

Nous en déduisons des formules générales paramétriques de l'équation proposée en choisissant les paramètres de telle sorte que 192 $a\,b\,c\,d$ devienne un bicarré. Nous obtenons par exemple:

a	b	c	d	
$27u^4$	$4v^4$	w^4	t^4	} 4 paramètres
$3u^4$	$3v^4$	$3w^4$	$4t^4$	
$108u^4$	v^4	w^4	t^4	
$3u^4$	$4v^4$	$9w^4$	t^4	

$27u$ $4u$ u^2 v^4 } 2 paramètres.

Les expressions des x_i et y_i s'en déduisent aisément; par exemple:

$$x_1 = a+b+c+d,$$
$$x_2 = a+b-c-d,\ x_3 = \cdots.$$

[1]) Voir: „R. M. T.", XV, Nr. 10, p. 113.

Ex. numériques:

(I) $24^4 + 19^4 + 7^4 + 4^4 = 23^4 + 20^4 + 12^4 + 8^4 + 3^4$ (= 464754)

(II) $29^4 + 23^4 + 2 \cdot 22^4 = 2 \cdot 26^4 + 25^4 + 19^4 + 12^4$ (= 1455634)

(III) $\overline{111}^4 + 3 \cdot 107^4 = 3 \cdot \overline{109}^4 + \overline{105}^4 + 12^4$ (= 545045844)

(IV) $16^4 + 9^4 + 4^4 + 3^4 = 13^4 + 2 \cdot 12^4 + 7^4$ (= 72434)

(V) $67^4 + 57^4 + 49^4 + 43^4 = 65^4 + 59^4 + 51^4 + 41^4 + 24^4$ (= 39890724)

(VI) $41^4 + 29^4 + 21^4 + 17^4 = 37^4 + 33^4 + 25^4 + 24^4 + 13^4$ (= 3811044)

A. GLODIN
(Luxembourg)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 4, Decemvrie 1935. Seminarul Matematic de pe lângă Universitatea din Iaşi, de *I. Ionescu*. Asupra unei probleme de geometrie elementară, plană, de *Alexandru I. Guţu*. Aplicaţiuni ale calculului vectorial, de *Gh. Vasiliu*. Premiu Inginer „*Al Roşu*" de *G-l Gh Buiciu*, Ing. *A. Ioanovici*, *Al. A. Roşu*.

2. *Ştiinţă şi Progres*, revista ştiinţifică a liceelor militare, anul II, N-rile 7—8, Decemvrie 1935. Condiţiile ca rădăcinele unei ecuaţii de gradul al 2-lea să aibă o anumită situaţie faţă de numere date, de *V. Alaci*. Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de *Radu Bădescu*. Asupra numerelor A, de *N. O. Zaharia*. Fotochimia, de *Traian I. Codreanu*. Depozite de sare din Maramureş de *A. Balint*. Noutăţi. Publicaţii noi. Probleme rezolvate şi propuse.

3. *Numerus*, volumul I, caietul 6, Decemvrie 1935. *Leonard Euler* (cu un portret). Este o detailată biografie, foarte instructivă; Chestiuni de Examen. Probleme propuse. La Géométrie du Triangle, par *Traian Lalesco*. (continuare).

4. *Gazeta Matematică*, Supliment cu Exerciţii, anul II, No. 4, Ianuarie 1935. Conţine probleme rezolvate şi propuse.

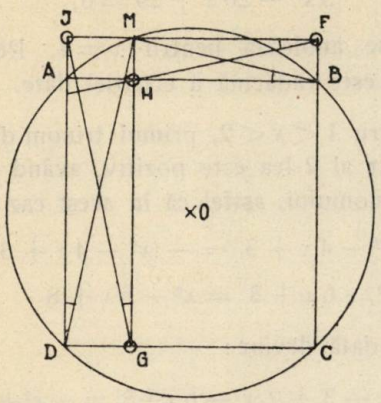
5. *Revista Cercului de Studii al Şcoalei Superioare P. T. T.*, anul IV, No. 12, Decemvrie 1935. Asupra unei măsurători de Ing. *I. C. Schileru*. Pagina matematică, probleme rezolvate şi propuse.

PROBLEME REZOLVATE

882. — *Proecţiile unui punct* M *al unui cerc, pe laturile unui dreptunghiu înscris în acel cerc, sunt astfel că una din ele este ortocentrul triunghiului format de celelalte proecţii.*

LT. M. I. FOCSENEANU

Fie F, G, H, I proecţiile lui M pe laturile BC, CD, AB, AD ale dreptunghiului ABCD. Evident că dreptele MHG, IMF sunt perpendiculare între ele. Din dreptunghiurile MFBH şi MGDI se scoate:



(1) $\sphericalangle MFH = \sphericalangle MBH$

(2) $\sphericalangle MGI = \sphericalangle MDI.$

Dar unghiurile MBH, MDI având aceiaşi măsură, sunt egale aşa că (1) şi (2) dau:

$$\sphericalangle MFH = \sphericalangle MGI,$$

care arată că $\sphericalangle MFH$ este suplimentar cu $\sphericalangle MIG$. Deci FH este perpendiculară pe GI şi cum FI, GM sunt perpendiculare, rezultă că H este ortocentrul triunghiului IGF. Urmează că F, G, I sunt ortocentrele respective ale triunghiurilor IHG, IHF, GHF.

Soluţie dată de d-nul: *Motoc D. Mircea* (Oltenita).

976. — *Fie* A', B', C' *picioarele înălţimelor;* A_1, B_1, C_1 *picioarele medianelor şi* $\varphi_1\ \varphi_a$ *punctele lui Feuerbach corespunzătoare unghiului* A *al unui triunghiu* ABC. *Dacă a, b, c şi* $2p$ *sunt laturile şi perimetrul aceluiaşi triunghiu, să se demonstreze că avem:*

$$a\frac{\varphi A'}{\varphi A_1} + b\frac{\varphi B'}{\varphi B_1} + c\frac{\varphi C'}{\varphi C_1} = 2p$$

$$a\frac{\varphi_a A'}{\varphi_a A_1} + b\frac{\varphi_a B'}{\varphi_b B_1} + c\frac{\varphi_c C'}{\varphi_c C_1} = 2(p+a).$$

G-L GH. BUICLIU

In articolul d-lui *V. Thébault „Sur le théorème de Feuerbach"* publicat în *Gazeta Matematică* Vol. XXXV. pag. 365 se stabileşte relaţiunea:

$$\frac{\varphi A'}{\varphi A_1} = \frac{2(p-a)}{a},$$

şi analoagele ei. — Prin adunare se deduce relaţiunea primă din enunţ.

Pentru relaţiunea a doua, urmând calea din articolul citat se găseşte:

$$a\frac{\varphi_a A'}{\varphi_a A_1} = a+b+c$$

$$b\frac{\varphi_a B'}{\varphi_a B_1} = a+b-c$$

$$c\frac{\varphi_a C'}{\varphi_a C_1} = c+a-b,$$

de unde prin adunare se găseşte a doua relaţiune de demonstrat.

D-l *N. N. Mihăileanu* (Constanţa), a rezolvat foarte bine problema, utilizând formulele din articolul citat, pentru prima relaţiune şi dând demonstraţia geometrică complectă pentru relaţiunea a doua.

1128. — *Să se arate că, dacă notaţiile sunt cele obicinuite într'un triunghiu, avem identitatea:*

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R+r)^3 - 12Rp^2.$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Soluţia autorului. Dacă în identitatea:

$$x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y+z)(xy+yz+yx) + 3xyz,$$

punem:

$$x = r_a, \quad y = r_b, \quad z = r_c,$$

şi ţinem seamă de următoarele relaţii cunoscute într'un triunghiu:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r, \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2,$$
$$r_a r_b r_c = p^2 r,$$

atunci putem scri succesiv:

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (r_a + r_b + r_c)^3 - 3(r_a + r_b + r_c) \times (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) + 3 r_a r_b r_c = (4R+r)^3 - 3(4R+r)p^2 + 3p^2 r = (4R+r)^3 - 12Rp^2,$$

adică tocmai identitatea cerută.

Soluţii bune, dar mai lungi, date de d-nii: *Pâslariu V. Vasile* (lic. Codreanu, Bârlad), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iaşi) şi *Tica Petre Marin* (Craiova).

1293. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$|x^2-4x+3|+2|x^2-6x+8|=-x^2+8x-13$$

V. ALACI

Notaţia $|A|$ înseamnă valoarea absolută a lui A şi este echivalentă cu egalităţile:

$$|A|=\begin{cases} A, & \text{dacă } A>0 \\ 0, & \text{„ } A=0 \\ -A, & \text{„ } A<0 \end{cases}$$

Acum considerăm ecuaţiile auxiliare:

$$x^2-4x+3=0, \qquad x^2-6x+8=0.$$

Rădăcinele lor sunt respectiv:

$$x_1=1, \quad x_2=3; \qquad x_3=2, \quad x_4=4.$$

Formăm intervalele:

$$-\infty<1<2<3<4<\infty,$$

facem ca x să varieze şi cercetăm cazurile următoare:

1° Pentru:

$$-\infty<x<1, \qquad \text{sau} \qquad 4<x<\infty,$$

trinoamele:

(1) $\qquad x^2-4x+3, \qquad x^2-6x+8$

sunt pozitive, ceea ce ştim de la semnul trinomului, x fiind în afara rădăcinelor. Aşa fiind, vom lua în acest caz:

$$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3,$$
$$|x^2-6x+8|=x^2-6x+8,$$

astfel că ecuaţia propusă devine:

$$x^2-4x+3+2(x^2-6x+8)=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$4(x^2-6x+8)=0,$$

cu rădăcinele:

$$x'=2, \qquad x''=4.$$

Cum aceste rădăcini nu cad în intervalele $(-\infty, 1)$, $(4, \infty)$, rezultă că ecuaţia dată nu admite rădăcini în aceste intervale.

2°. Pentru $x=1$, primul trinom din ecuaţia dată este zero, iar al 2-lea este pozitiv, 1 fiind mai mic ca rădăcinele sale, deci vom lua:

$$|x^2-6x+8|=x^2-6x+8,$$

astfel că ecuaţia din enunţ se reduce la următoarea:

$$2(x^2-6x+8)=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$3x^2-20x+29=0,$$

care nu se anulează pentru $x=1$. Rezultă că $x=1$, nu este rădăcină a ecuaţiei date.

3°. Pentru $1<x<2$, primul trinom din (1) este negativ, iar al 2-lea este pozitiv, având în vedere semnul trinomului, astfel că în acest caz vom lua:

$$|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3)$$
$$|x^2-6x+8|=x^2-6x+8$$

şi ecuaţia dată devine:

$$-x^2+4x-3+2(x^2-6x+8)=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$2(x^2-8x+13)=0,$$

cu rădăcinele:

$$x=4\pm\sqrt{3}, \quad \text{adică: } x'=2{,}26\ldots; \; x''=5{,}73\ldots$$

Cum aceste rădăcini nu's cuprinse în intervalul (1, 2), rezultă că ecuaţia propusă n'are rădăcini nici în acest interval.

4°. Pentru $x=2$, primul trinom din (1) este negativ, iar al 2-lea nul, astfel că vom lua:

$$|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3)$$

şi ecuaţia dată se poate scri:

$$-x^2+4x-3=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$-2(2x-5)=0,$$

care nu-i verificată de $x=2$, deci $x=2$ nu este soluţie pentru ecuaţia dată.

5°. Pentru $2<x<3$, ambele trinoame din (1) sunt negative, deci vom lua:

$$|x^2-4x+3|=-(x^2-4x+3),$$
$$|x^2-6x+8|=-(x^2-6x+8)$$

şi ecuaţia din enunţ devine:

$$-x^2+4x-3-2x^2+12x-16=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$-2(x^2-4x+3)=0,$$

cu rădăcinele:

$$x'=1, \qquad x''=3,$$

rădăcini care nu cad în intervalul (2, 3), deci n'avem în acest interval soluții pentru ecuația dată.

6°. Pentru $x=3$, primul trinom din (1) este nul, iar al 2-lea este negativ, astfel că vom lua:

$$|x^2-6x+8|=-(x^2-6x+8)$$

și deci ecuația dată se poate scri:

$$-2x^2+12x-16=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$x^2-4x+3=0,$$

care este verificată pentru $x=3$. Deci $x=3$ este o soluție a ecuației date.

7°. Pentru $3<x<4$, primul trinom din (1) este pozitiv, iar al 2-lea negativ, deci vom lua:

$$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3,$$
$$|x^2-6x+8|=-(x^2-6x+8),$$

și ecuația dată devine:

$$x^2-4x+3-2x^2+12x-16=-x^2+8x-13$$

sau:

$$0\,.\,x=0,$$

ceiace înseamnă că ecuația dată este verificată pentru orice valoare a lui x din intervalul (3, 4).

8°. Pentru $x=4$, primul trinom din (1) este pozitiv, iar al 2-lea nul, deci vom lua:

$$|x^2-4x+3|=x^2-4x+3,$$

și ecuația dată devine:

$$x^2-4x+3=-x^2+8x-13,$$

sau:

$$x^2-6x+8=0,$$

care este verificată pentru $x=4$. Deci $x=4$ este o soluție a ecuației date.

Toate cazurile sunt astfel cercetate și deducem din analiza de mai sus că, *ecuația dată admite o infinitate de rădăcini cuprinse în intervalul* (3, 4) *inclusiv extremitățile.*

Observare: Dacă considerăm funcțiunea:

(2) $y=|x^2-4x+3|+2|x^2-6x+8|+x^2-8x+13$

și ne propunem să o reprezintăm grafic, alegând un sistem de axe rectangulare xOy, iată ce rezultă în virtutea celor stabilite până aci:

1°. In intervalul $(-\infty, 1)$ funcțiunea (2) este reprezentată prin arcul corespunzător al parabolei:

$$y_1=4(x^2-6x+8).$$

2°. In intervalul (1, 2) funcțiunea (2) este reprezentată prin arcul corespunzător al parabolei:

$$y_2=2(x^2-8x+13).$$

3°. In intervalul (2, 3) funcțiunea (2) este reprezentată prin arcul corespunzător al parabolei:

$$y_2=-2(x^2-4x+3).$$

4°. In intervalul (3, 4) funcțiunea (2) este reprezentată de un segment de dreaptă asezat pe dreapta:

$$y_4=0.$$

5°. In intervalul $(4, \infty)$, funcțiunea (2) este reprezentată prin arcul corespunzător din parabola:

$$y_5=4(x^2-6x+8).$$

Toate aceste arce de parabolă și segmentul din 4°, formează o linie continuă, fiindcă:

Pentru $x=1$, avem:

$$y_1=y_2=12.$$

Pentru $x=2$, avem:

$$y_2=y_3=2.$$

Pentru $x=3$, avem:

$$y_3=y_4=0.$$

Pentru $x=4$, avem:

$$y_4=y_5=0.$$

Graficul total al funcțiunei (2), este acum ușor de trasat.

S'au primit 9 soluții, greșite, crezându-se că a fost propusă spre rezolvare o ecuație obicinuită de gradul al 2-lea.

1302. — *Să se arate că oricare ar fi x, există următoarea egalitate trigonometrică:*

$$[\sin x(\sin^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x)]^2 - [\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x + 3\sin^2 x)]^2 = (\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x)^3.$$

MIHAIL BOTEZ

Notând pentru simplificare:

$$\sin x = a, \quad \operatorname{tg} x = b,$$

identitatea dată se înlocueşte cu următoarea:

$$(1) \quad [a(a^2 + 3b^2)]^2 - [b(b^2 + 3a^2)]^2 = (a^2 - b^2)^3.$$

Notând cu E primul membru din (1), putem scri succesiv:

$$E = (a^3 + 3ab^2)^2 - (b^3 + 3a^2 b)^2 = (a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3a^2 b)(a^3 + 3ab^2 - b^3 - 3a^2 b) = (a+b)^3(a-b)^3 = (a^2 - b^2)^3.$$

Astfel identitatea (1) şi deci cea dată, este stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Cazanacli P.* (Chişinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Creangă Vasile* (lic. Milit., Chişinău), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Florescu I. Victor* (lic. Milit., N. Filipescu), *Gavrilescu N. C-tin* (Iaşi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit., de Artilerie), *Hompola Tiberiu* (lic. Beiuş), *Lupescu Gh. Corneliu* (bacaulaureat, Roman), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuş), *Maşcas Gh. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Milu I. Nicolae*, *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila) *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popoviciu I. Gavril* (lic. Carei), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit., N. Filipescu), *Predoescu I. Marin* (Şc. Politech., Timişoara), *Rosenberg I.* (lic. Roman), *Secară D-tru* (lic. Internat, Iaşi), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ţiteica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu) şi *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt).

1347. — *Dacă notăm cu* A, B, C, D *polinoamele:* $a-b-c-d$, $b-c-d-a$, $c+d-a-b$ *şi* $a+b+c+d$, *să se arate că fracţiunea:*

$$\frac{\Sigma A^2 \cdot \Sigma A^3}{\Sigma A^5},$$

este independentă de a, b, c, d.

MAIOR I LINTES

Notând pentru prescurtare:

$$a+b=m, \quad a-b=n, \quad c+d=p,$$

avem:

$$A = a-b-(c+d) = n-p$$

$$B = -(a-b)-(c+d) = -(n+p)$$

$$C = c+d-(a+b) = p-m$$

$$D = c+d+(a+b) = p+m.$$

De aci deducem:

$$(1) \quad \Sigma A^2 = (n-p)^2 + (n+p)^2 + (p-m)^2 + (p+m)^2 = 2(m^2 + n^2 + 2p^2)$$

$$(2) \quad \Sigma A^3 = (n-p)^3 - (n+p)^3 + (p-m)^3 (p+m)^3 = -6n^2 p + 6pm^2 = 6p(m^2 - n^2)$$

$$(3) \quad \Sigma A^5 = (n-p)^5 - (n+p)^5 + (p-m)^5 + (p+m)^5 = (n^5 - 5n^4 p + 10n^3 p^2 - 10n^2 p^3 + 5np^4 - p^5) - (n^5 + 5n^4 p + 10n^3 p^2 + 10n^2 p^3 + 5np^4 + p^5) + (p^5 - 5p^4 m + 10p^3 m^2 - 10p^2 m^3 + 5pm^4 - m^5) + (p^5 + 5p^4 m + 10p^3 m^2 + 10p^2 m^3 + 5pm^4 + m^5) = (-10m^4 p - 20n^2 p^3 - 2p^5) + (2p^5 + 20p^3 m^2 + 10pm^4) = 20p^3(m^2 - n^2) + 10p(m^4 - n^4) = 10p(m^2 - n^2)(m^2 + n^2 + 2p^2).$$

Ţinând seamă de relaţiile (1), (2) şi (3), fracţiunea din enunţ se poate scri:

$$\frac{\Sigma A^2 \cdot \Sigma A^3}{\Sigma A^5} = \frac{2(m^3 + n^2 + 2p^2)\,6p(m^2 - n^2)}{10p(m^2 - n^2)(m^2 + n^2 + 2p^2)} = \frac{6}{5},$$

deci independentă de a, b, c, d.

Soluţii date de d-ra: *Savin Mărioara* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi) şi de d-nii *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Negrea A. Mircea-Leonte* (Brăila).

1360. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{1}{\sec x} = \frac{\operatorname{tg} 2x(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

SUB-LT IOAN C. VONICA

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$

ecuaţia dată devine:

$$\cos x = \frac{\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\dfrac{1}{\cos^2 x}},$$

sau:

$$\cos x = 2\cos^2 x \operatorname{tg} x.$$

Această ecuație se mai poate scri:

$$\cos x(1 - 2\cos x \operatorname{tg} x) = 0,$$

sau:

$$\cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

De aci rezultă:

$\cos = 0$, deci: $x = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$\sin x = \frac{1}{2}$, deci: $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

Soluții date de d-ra: *Popescu N. Maria* (București) și de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel*, *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iași), *Buzincu I. Ioan* (lic. Milit, Iași), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cehan G. Aristide* (lic. Milit., Cernăuți), *Chiriac I. Simion* (lic. Huși), *Ciucă Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Cotescu Costel* (lic. Milit, Iași), *Craiu S. Petre* (lic. Milit., Cernăuți), *Cristea G. Emilian* (lic. Milit., Cernăuți), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Dobrescu Paul* (lic. Milit, N. Filipescu), *Enăşescu D. D-tru Victor* (lic. Milit., Iași), *Florescu Gh. Haralambie* (lic. Milit., Chișinău), *Găbuleanu Mircea* (lic. Milit., Cernăuți), *Gavrilescu N. C-tin* (Iași), *Godeanu Ig. Vasile* (Șc. Milit. de Artilerie), *Hompoia I. Tiberiu* (lic. Beiuș), *Ionescu D-tru* (lic. Milit., N. Filipescu), *Lascarache Gh.* (lic. Milit., Cernăuți), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Milit de Artilerie), *Măgală Gh.* (lic. Milit., Cernăuți), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuș), *Milea G. E.* (Sub-Lt), *Millu I. Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Mitache I. Anton* (lic. Milit., Chișinău), *Murgu Marțian* (lic. Beiuș), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Pambucdjian Kricor* (lic. Constanța), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Postelnicescu* (lic Milit., N. Filipescu), *Pupăzan Gh. C-tin* (lic. Tg-Jiu), *Roman I. Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Rotaru Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuți), *Rumceanu N. C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Secară M. D-tru* (lic. Internat, Iași), *Segărceanu Marin* (lic. Milit., Cernăuți), *Şerbănescu A. Mircea* (lic. Milit., Cernăuți), *Ştefănescu D. Nicolae* (lic. Milit, N. Filipescu), *Stoica D.* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Stoica P. Ioan* (lic. Milit, Cernăuți), *Tanasaciuc V. Claudius* (lic. Milit., Cernăuți), *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Țiţeica I. Lie* (lic Milit., N. Filipescu), *Vasilescu A. Gheorghe* (lic. Milit, Cernăuți), *Vasiliu M. Olimpiu* (lic. Milit., Cernăuți), *Verpinski Nicolae* (lic. Milit., Cernăuți), *Vusatiuc Dan Mihai* (lic. Milit., Cernăuți) și *Zgârcea Gherasim* (lic. Milit., Cernăuți).

1361. — *Să se găsească un număr de patru cifre însemnătoare și diferite, astfel ca cifra a doua să fie egală cu suma celorlalte cifre, știind că dacă adăogăm acestui număr unitatea, obținem un patrat perfect de patru cifre diferite.*

M. AMARASTEANU

Fie $a\,b\,c\,d$ numărul cerut. Conform enunțului trebuie să avem:

$$b = a + c + d$$

$$a\,b\,c\,d + 1 = N^2.$$

Din prima relație deducem:

(1) $$6 \leq b \leq 9,$$

căci cifrele sunt diferite.

Terminațiile lui N^2 sunt:

00, 01, 04, 09, 16, 21, 24, 25, 29, 36, 41, 44, 49, 56, 61, 64, 69, 76, 81, 84, 91, 96.

Cifrele lui N^2 fiind diferite, vom elimina din acest șir pe acelea care au două cifre identice, pe acelea ce conțin pe 0 și pe acelea terminate cu 1, căci ar rezulta $d = 0$. Urmează dar că terminațiile lui N^2, ar putea fi:

16, 24, 25, 29, 36, 49, 56, 64, 69, 76, 84, 96.

Micșorând cu 1 fiecare din aceste numere, avem pe $c\,d$, și ținând seamă de (1), eliminăm din acest șir pe acelea care ne-ar da $c + d > 8$, astfel că terminațiile lui N^2 pot fi numai:

16, 24, 25, 36.

N^2 este de forma:

$$a\,b\,16,\ a\,b\,24,\ a\,b\,25,\ a\,b\,36.$$

Ținând seamă de (1) și de faptul că $c\,d$ poate fi 15, 23, 24, 35, rezultă că N^2 se găsește printre numerile:

1716	1624	1725	1936
2816	2724	2825	
3916	3824	3925	
	4924		

Dintre acestea eliminând pe acelea care au două cifre egale, sau care micșorate cu 1, rămân cu două cifre egale, rămâne că N^2 ar putea fi:

2816, 3916, 1624, 1725, 3925, 1936.

Numărul 1725, se poate elimina, fiind divizibil prin 3 fără a fi și prin 9, iar dintre numerile rămase, numai 1936 este patrat perfect, $1936 = 44^2$.

Numărul cerut este astfel 1935.

Soluții date de d-ra: *Savin Maria* (l'c. Oltea Doamnă, Iași) și de d-nii: *Avram Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Chiriac I. Simion* (lic. Huși), *Cotescu Costel* (lic. Milit, Iași), *Dulămiță Gr. Ioan* (lic. Milit, Craiova), *Godeanu Ig. Vasile* (Șc. Milit., de Artilerie), *Grossu Robert* (lic. Sf. Andreiu, București), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Milit., de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuș), *Murgu F. Marțian* (lic. Beiuș), *Panait Mircea* (Șc. Of. Artilerie), *Petrescu-Craioviţa Anastasie* (Craiova), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș) și *Savin Ioan-Roman* (lic. Milit., Craiova).

1362. — *Să se afle condiția de divizibilitate cu 3, pentru sistemul de numerație cu baza 4.*

EUGEN VISA

Un număr N în baza 4 se poate scri:

$$(1)\quad N = a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + \cdots + a_n 4^n = \sum_{i=0}^{n} a_i 4^i$$

Cum:

$$4 = 3 + 1,$$

rezultă:

$$4^i = \text{mult. } 3 + 1,$$

și astfel relația (1) devine:

$$N = \sum_{i=0}^{n} a_i (\text{mult. } 3 + 1) = \text{mult. } 3 + \sum_{i=0}^{n} a_i .$$

Ruzultă de aci că, pentru ca N să fie divizibil prin 3, trebuie să avem:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \text{mult } 3,$$

adică: *Pentru ca un număr scris în baza 4 să fie divizibil prin 3, trebuie ca suma cifrelor sale să se dividă prin 3.*

Observare. Avem aci aceiași regulă de divizibilitate prin 3, ca în sistemul zecimal.

Soluții date de d-nii: *Bucur N. Virgil* (lic. Milit., Iași), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Cotescu Costel* (lic. Milit., Iași), *Damsker D.* (lic. Național, Iași), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Moisovici Ștefan* (lic. Carol, Craiova), *Petrescu-Craiovița Anastasie* (Craiova) și *Țițeica I. Ilie* (lic. Milit., N. Filipescu).

PROBLEME PROPUSE

1449. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre însemnătoare și diferite, știind că ultima cifră este egală cu suma primelor trei, iar prima și ultima cifră sunt divizibile prin 3.

DUMITRU D. MATEI

1450. — Să se găsească patratele perfecte de forma $a\,a\,b\,b$, unde a și b sunt două numere de același număr de cifre.

Să se cerceteze cazul când sunt de 1, 2 sau 3 cifre.

GH. CONSTANTINESCU

1451. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + yz + zx + b^2 = 3a^2 \\ (x+y)(y+z)(z+x) + 2ab^2 = 8a^3, \end{cases}$$

a și b fiind două constante.

I. V. MATIES

1452. — Să se afle rădăcinele sistemului:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x(x+1) + 3y(y+1) = a \\ y^3 + z^3 + 3y(y+1) + 3z(z+1) = b \\ z^3 + x^3 + 3z(z+1) + 3x(x+1) = c. \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1453. — Dacă a, b, c sunt laturile unui tringhiu dreptunghiu și dacă notăm:

$$A = \frac{b}{b-c}, \quad B = \frac{c}{a+b+c},$$

atunci avem identitatea:

$$A = \frac{1-2C}{1-4B+2B^2}.$$

MARCEL M. AMARASTEANU

1454. — Fie M un punct mobil pe cercul de diametru fix A B. Tangentele în M și B la cerc se întâlnesc în N. Dreapta A N tae cercul a doua oară în C. Se cere locul punctului de intersecție al tangentei în C la cerc cu M N.

G-L GH. BUICLIU

1455. — Să se construească unghiul α, astfel ca să avem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}},$$

știind că unghiurile A, B, C sunt unghiurile unui triunghiu.

V. ALACI

1456. — Să se arate că într'un triunghiu oarecare avem relația:

$$r^2 \prod (r_a - r_b) = 2R^2 \prod (h_b - h_a).$$

MARICA POMPEIU

INFORMAŢIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**.

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

UNIVERSITE DE NANCY — INSTITUT DE FRANCAIS

Cours pour les Etrangers.

Enseignement pratique et complet de la langue, de la littérature et de la civilisation françaises.

ENNEE SCOLAIRE — (Novembre à fin Juin).

COURS DE VACANCES — (Juillet-Août-Sept.)

Diplômes d'études françaises — préparation aux examens de l'ALLIANCE FRANCAISE.

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara" se primesc abonamente pentru :

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA
care începe în Martie 1935.

Costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Toţi cei ce ne trimet articole, note, probleme propuse sau rezolvate, pentru a fi luate în consideraţie, sunt obligaţi a fi abonaţi la Revista Matematică din Timişoara.

Figurile ce însoţesc soluţiile problemelor, notelor şi articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) şi de e posibil în tuş.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite pe adresa : Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

ANUL XV. 15 FEBRUARIE 1936 No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. A. GLODEN: SUR QUELQUES RÈGLES DE DIVISIBILITÉ.
2. G-L GH. BUICLIU: O PARTICULARITATE A TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE.
3. NOTE MATEMATICE: 21, 22, 23.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 445, 1283, 1366, 1367.
6. PROBLEME PROPUSE: 1457–1463.
7. TABLA DE MATERII.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte grafice Tipografia Românească

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Avem plăcerea a anunţa că începând dela 15 Februarie 1936, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara" fostul nostru distins corespondent: *N. O. Zaharia,* licenţiat în Matematici, profesor asistent la liceul Militar, Târgul-Mureş.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci,** profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Plata abonamentului se face prin CEC (Casa de economii şi cecuri postale) unde revista are contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal adresat d-lui Prof. C. TEODORESCU, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XV, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XV inclusiv, broşate, 120 lei fiecare.

ANUL XV — No. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1936

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Școalei Politechnice din Timișoara.

SUR QUELQUES RÈGLES DE DIVISIBILITÉ

PAR A. GLODEN
Professeur, Luxenbourg.

Si l'on calcule les restes des puissances de 10 par 7 par exemple, on établit une régle de divisibilité assez compliquée. Dans l'application de cette règle et des règles analogues, on considère séparément les chiffres du nombre à examiner; mais on obtient des règles de divisibilité s'énonçant plus simplement en partageant le nombre en des tranches convenablement définies.

A. Nous partageons le nombre N en deux tranches de façon que $N = 10n + u$ *(unités); si* $\overline{d'u'}$ *désigne un nombre de deux chiffres ou l'un de ses multiples* < 100 *pour lequel on a déterminé deux nombres* a *et* b *tels que* $au' + bd' \equiv 0 \pmod{\overline{d'u'}}$, *et si l'on a en même temps* $au + bn \equiv 0 \ (\overline{d'u'})$, *ou* $\left(\frac{d'u'}{m}\right)$, *on peut affirmer que N est divisible par* $\overline{d'u'}$ *respectivement par un sous-multiple de* $\overline{d'u'}$ (a et b peuvent être tous les deux positifs, ou l'un des deux peut aussi être négatif).

Exemple. a. $d'u' = 13$; $3a + b = 0$ pour $a = -1$, $b = 3$.

Règle: *Un nombre est divisible par 13 si le triple du nombre des dizaines moins le chiffre des unités est un multiple de 13 ou 0.*

b. $\overline{d'u'} = 17$; nous prendrons plutôt le multiple 51 formé avec des chiffres plus petits, que le nombre 17, $a + 5b = 0$ pour $a = -5$, $b = 1$.

Règle: *Un nombre est divisible par 17 si le nombre de ses dizaines moins le quintuple du chiffre de ses unités est un multiple de 17 ou* 0.

c. La méthode est applicable à la recherche d'un caractère de divisibilité par 7; considérons le multiple de deux chiffres comportant les chiffres les plus petits; c'est $d'u' = 21$; $a + 2b = 0$ pour $a = -2$, $b = 1$. D'où la règle (connue):

Un nombre est divisible par 7 si la différence entre le nombre de ses dizaines et le double du chiffre des unités est un multiple de 7 ou 0.

d. La méthode est applicable, qu'il s'agisse d'un nombre premier ou non. Cherchons un caractère de divisibilité par $\overline{d'u'} = 32$; $2a + 3b = 0$ pour $a = -3$, $b = 2$. D'où la règle:

Un nombre est divisible par 32 si la différence entre le double du nombre de ses dizaines et le triple du chiffre de ses unités est un multiple de 32 ou 0.

B. Nous partageons le nombre N en deux tranches $N = 100n + \overline{du}$ (tranche formée par le chiffre des dizaines et des unités). Voici le théorème analogue à celui énoncé sub A.: Si $\overline{c'd'u'}$ désigne un nombre de trois chiffres ou l'un quelconque de ses multiples inférieur à 1000 pour lequel on a déterminé deux nombres a et b tels que:

$$a \cdot \overline{d'u'} + bc' \equiv 0 \quad (\overline{c'd'u'}),$$

et, si l'on a en même temps:

$$a \cdot \overline{du} + bn \equiv 0 \quad (\overline{c'd'u'}) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{c'd'u'}{m}\right),$$

le nombre N est divisible par $\overline{c'd'u'}$ respectivement par un sous-multiple de $\overline{c'd'u'}$.

Exemples: a. $102 = 6 \cdot 17$, $2a + b = 0$ pour $a = -1$ et $b = 2$.

Règle: *Un nombre est divisible par 17 si la différence entre le double du nombre des centaines et la tranche formée par les deux derniers chiffres à droite est un multiple de 17 ou* 0.

b. 103 ; $3a+b=0$ pour $a=-1$, $b=3$.

Règle : *Un nombre est divisible par 103 si la différence entre le triple du nombre de ses centaines et la tranche formée par le chiffre des dizaines et celui des unités est un multiple de 103 ou 0.*

Exemples où l'on applique respectivement la règle :

A a. 1651 par 13 ?

165.3−1=494 ; 49.3−4=143 ; 14.3−3=39=M. 13.

1651 est divisible par 13.

A b) 8126 par 17 ?

812 − 6.5 = 782 ; 78 − 2.5 = 68 = M. 17,

8126 est divisible par 17, etc.

B a. 8126 par 17 ?

81.2 − 26 = 136 ; 1.2 − 36 = −34 = M. 17,

8126 est divisible par 17, etc.

Cas où il y a un reste. Application de la règle B a.

8127 par 17 ?

81.2 −27 = 135 ; 1.2 − 25 = −33 ; reste = +1.

8181 par 17 ?

81.2 −81 = 81 ; 0.2 − 81 = −81 ; reste = +4.

Le lecteur verra sans peine comment le procédé peut être généralisé. On choisira dans tous les cas un multiple du nombre dont on veut établir un caractère de divisibilité tel que la somme de ses chiffres soit la plus petite possible. (Il est indiqué d'opérer, le cas échéant, plutôt sur un multiple du nombre que sur le nombre lui-même ; 17 p. ex. a pour somme des chiffres 8, le multiple 102 a pour somme de ses chiffres 3)

Ces règles sont plus simples que celles qu'on obtient en considérant séparément les chiffres du nombre dont on veut constater la divisibilité par un nombre donné ; elles sont assez faciles à établir. Dans certains cas leur emploi réitéré peut être d'une réelle valeur pratique.

O PARTICULARITATE A TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

DE

G-L GH BUICLIU

Fie MN diametrul perpendicular pe latura BC a unui triunghiu oarecare ABC, în care AC > AB. Ne propunem să calculăm lungimile AM, AN. Pentru aceasta se poate vedea imediat pe o figură că dacă N este de aceiaşi parte a lui BC cu A, atunci AM este bisectoarea interioară, iar AN bisectoarea exterioară a unghiului A şi :

$$\sphericalangle MNA = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\sphericalangle NMA = \frac{\pi}{2} - \hat{C} - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{B-C}{2}.$$

Triunghiul dreptunghic MAN dă :

$$(1)\quad AM = MN \cos NMA = 2R \cos\frac{B-C}{2}$$

$$(2)\quad AN = MN \sin NMA = 2R \sin\frac{B-C}{2}.$$

Acestea sunt formulele generale ale valorilor celor două segmente.

Să considerăm cazul particular al unui triunghiu dreptunghic în A. In acest caz :

$$2R = a$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} =$$

$$\frac{b+c}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

unde p este semiperimetrul triunghiului. Dar ultimul radical este tocmai valoarea lui $\sin\frac{A}{2}$, sau al lui sin 45° pentru triunghiurile dreptunghice, aşa că :

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{b+c}{a}.$$

Cu acestea, (1) devine :

$$AM = \frac{b+c}{2}\cdot\sqrt{2},$$

adică *latura patratului în cercul de diametru* $b+c$.

La fel se găseşte :

$$AN = \frac{b-c}{2}\sqrt{2},$$

adică *latura patratului în cercul de diametru* $b-c$.

Prin urmare :

Intr-un triunghiu dreptunghic ABC, *distanţele vârfului* A *la extremităţile diametrului perpendicular pe* BC *sunt egale cu laturile patratelor înscrise în cercurile de diametre* $b \pm c$.

Această proprietate este o particularitate numai a triunghiurilor dreptunghice, căci dacă ar mai fi şi alte triunghiuri care să o aibă, ar trebui ca:

$$AM = 2R\cos\frac{B-C}{2} = \frac{b+c}{2}\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin B + \sin C)$$

$$\cos\frac{B-C}{2}\left[\sin\frac{B+C}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 0.$$

De unde:

$$\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{\pi}{2},$$

care este imposibilă când B, C sunt unghiuri într'un triunghiu oarecare, sau:

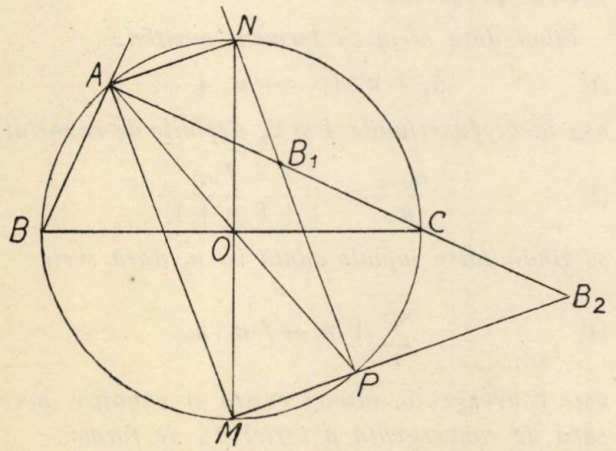
$$\sin\frac{B+C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$B + C = \frac{\pi}{2},$$

deci numai triunghiul dreptunghic se bucură de proprietatea enunţată.

Proprietatea se poate demonstra şi direct geometric, pentru cazul triunghiului dreptunghic. Luăm pe AC punctele B_1, B_2 aşa în cât:

$$\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = \overline{AB}$$



şi notăm cu P extremitatea diametrului AO. Din dreptunghiul BACP rezultă:

$$\overline{PC} = \overline{AB} = \overline{CB_1}$$

şi deci în triunghiul B_1PB_2, dreapta PC este mediană şi înălţime. Triunghiul B_1PB_2 este deci dreptunghic isoscel, $\widehat{PB_2A} = 45^0$ şi PB_2 e paralelă cu AN şi perpendiculară pe AM. Cum A, P sunt diametral opuse, PB_2 trece prin M. La fel se arată că PB_1 trece prin N.

Din triunghiurile dreptunghice isoscele AMB_2 şi ANB_1, se deduce imediat că AM şi AN sunt laturile patratelor în cercurile de diametre:

$$AB_2 = b + c \qquad \text{şi} \qquad AB_1 = b - c.$$

NOTE MATEMATICE

21. — *Divizibilitatea prin 3 într-o bază oarecare de numeraţie.*

Problema 1362 rezolvată la pagina 132, Vol. XV al acestei reviste, sugerează căutarea regulelor de divizibilitate prin 3 a numerelor scrise în o bază de numeraţie oare care.

Fie:

(1) $$N = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$$

un număr format din cifrele $a_0, a_1, \ldots a_n$ şi scris în baza X.

Faţă de 3, baza X poate fi de formele $3m$, $3m \pm 1$.

1°. Fie $X = 3m$. Se vede din (1) că *N se divide prin 3 când a_0, cifra unimilor se divide prin 3.*

2°. Când $X = 3m + 1$, relaţia (1) dă:

$$N = mult.\,3 + (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$$

şi condiţia de divizibilitate este aceiaşi ca în baza zecimală.

3°. Dacă $X = 3m - 1$, avem:

$$N = mult.\,3 + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots)$$

şi condiţia de divizibilitate este ca:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

să se dividă prin 3.

G-L GH. BUICLIU

Nota Redacţiei. O notă cu acelaşi cuprins s'a primit simultan şi de la d-l profesor *Gh. G. Constantinescu.*

22. — *Asupra câtorva expresiuni cu factoriale.*

Se ştie că expresiunea:

$$\frac{(a+b+\cdots+l)!}{a!\,b!\ldots l!}$$

este întreagă, $a, b, \ldots l$ reprezentând m numere întregi şi pozitive.

Analog avem:

$$\frac{(a!+b!+\cdots+l!)!}{a!!\ b!!\ldots l!!},$$

sau în general, notând cu $!^{(n)}$ repetarea de n ori a factorialei, avem:

$$\frac{[a!^{(n)}+b!^{(n)}+\cdots+l!^{(n)}]!}{a!^{(n+1)}\,b!^{(n+1)}\ldots l!^{(n+1)}},$$

care este o expresiune întreagă.

Dacă admitem acum că:

$$a=b=\cdots=l,$$

atunci expresiunea:

$$\frac{[m(a!^{(n)})]!}{[a!^{(n+1)}]^m}$$

este întreagă.

Deasemenea, dacă numai p numere sunt egale între ele şi restul de $(m-p)$, iarăşi sunt egale între ele, atunci expresiunea:

$$\frac{[p.(a!^{(n)})+(m-p)(l!^{(n)})]!}{[a!^{(n+1)}]^p.[l!^{(n+1)}]^{m-p}}$$

este întreagă.

Făcând diverse grupări şi diverse extensiuni, se poate obţine numeroase expresiuni analoge.

MAIOR I LINTES

23. — *Asupra unor serii cu termeni pozitivi.*

Fiind dată seria cu termeni pozitivi oricum:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

raportul a doi termeni consecutivi se poate pune sub forma:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+f(n)}{1+F(n+1)}, \tag{2}$$

unde f şi F au drept cea mai mai mare dintre limite pe $+\infty$.

1. Relaţia (2) se scrie, făcând-o lineară:

$$u_{n+1}+F(n+1)\,u_{n+1}-u_n-f(n).u_n=0,$$

din care, dând lui n primele n valori întregi, obţinem şirul de relaţii:

$$u_2+F(2)\,u_2-u_1-f(1)\,u_1=0$$
$$u_3+F(3)\,u_3-u_2-f(2)\,u_2=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_n+F(n)\,u_n-u_{n-1}-f(n-1)\,u_{n-1}=0$$
$$u_{n+1}+F(n+1)\,u_{n+1}-u_n-f(n)\,u_n=0$$

cari prin adunare ne dau:

$$u_{n+1}+F(n+1)\,u_{n+1}+\sum_2^n[F(n)-f(n)]\,u_n=u_1[1+f(1)],$$

sau, ţinând seamă de (2):

$$u_n+f(n)\,u_n+\sum_1^n[F(n)-f(n)]\,u_n=u_1[1+F(1)]. \tag{3}$$

Făcând pe n să tindă către infinit şi presupunând seria (1) convergentă, în care caz se are cu necesitate:

$$\lim_{n=\infty}u_n=0,$$

relaţia (3) devine:

$$\lim_{n=\infty}[f(n)\,u_n]+\sum_1^\infty[F(n)-f(n)]\,u_n=u_1[1+F(1)]. \tag{3'}$$

Deci, propoziţia:

Fiind dată seria cu termeni pozitivi:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

aşa încât funcţiunile f şi F, definite de raportul:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1+f(n)}{1+F(n+1)}, \tag{2}$$

să tindă către infinit odată cu n, dacă seria:

$$\sum_1^\infty[F(n)-f(n)]\,u_n \tag{4}$$

este convergentă, atunci există o condiţie necesară de convergenţă a seriei (1), de forma:

$$\lim_{n=\infty}[f(n)\,u_n]=\alpha,\ \text{(finit)}. \tag{5}$$

2. In ipoteza convergenţei seriei (1), condiţia de convergenţă a seriei (4), va fi:

$$\lim_{n=\infty}[F(n)-f(n)]>k>0. \tag{4'}$$

Aplicarea aceluiaşi criteriu, prin compararea seriei (4) cu o serie Σv_n, dovedită convergentă, ne va da o condiţie de forma:

$$(4'') \qquad \lim_{n=\infty} \left[\frac{F(n) - f(n)}{v_n} u_n \right] > k > 0.$$

Deci, seriile cari admit condiţia *necesară* de forma (5) formează o clasă particulară determinată de existenţa unei serii convergente cu termenul general:

$$[F(n) - f(n)]\, u_n$$

sau, în particular, determinată de existenţa unei serii convergente Σv_n care să facă posibilă scrierea condiţiei (4").

3. Numărul α, finit, din (5) poate fi şi zero, adică:

$$(5') \qquad \lim_{n=\infty} [f(n)\, u_n] = 0,$$

cu condiţia ca $f(n)$ să nu fie de forma:

$$f(n) = n\, \varphi(n),$$

unde $\varphi(n)$ este funcţie de n şi tinde odată cu el către infinit.[1] Condiţia (5') generalizează astfel, într'un caz particular, propoziţia lui *Pringsheim:*

$$\lim_{n=\infty} (n\, u_n) = 0.$$

N. O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XLI, No. 5, Ianuarie 1936. Sărbătorirea celor 40 de ani ai „Gazetei Matematice". Cuvântarea d-lui *A. D. Bunescu.* Cuvântarea d-lui Dr. *C. Angelescu*, Ministrul Instrucţiunei Publice. Cuvântarea d-lui *Ion Ionescu.* Cuvântarea *M. S. Regelui Carol II.* Extinderi asupra indicatorilor, de Maior *I. Linteş.*

2. *Boletin Matematico*, anul al VIII, No. 9, Noemvrie 1935, Buenos-Aires. Ecuaţiuni de congruenţe, de *M. O. Gonza'es.* Asupra unor serii de numere, de *W. Lewicky.*

3. *Ştiinţă şi Progres*, revista ştiintifică a liceelor militare, anul II, No. 9, Februarie 1936. Jubileul „Gazetei Matematice" de *Aurel A. Viciu.* Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, de *V. Alaci.* Asupra adevăratei valori a unei fracţiuni, (urmare), de *Radu Bădescu.* Notă, de *N. O. Z.* Hidrogenul greu, de *Gh N. Gheorghiu.* Sovata, de Prof *Ion Bozdog.* Publicaţii noui, de *A A Viciu.* Probleme rezolvate şi propuse.

4. *Numerus*, vol. I, caietul 7, Ianuarie 1936. *Isaac Newton* (cu un portret). Este o detailată biografie, foarte intructivă. Chestiuni de Examen. Probleme propuse. La Géométrie du Triangle, par *Traian Lalesco* (continuare).

[1]) *E. Borel. Leçons sur les séries à termes positifs*, p. 18.

PROBLEME REZOLVATE

445. — *Să se găsească numerile pătrate perfecte de forma a a, unde a este un număr oarecare.*

GH. CONSTANTINESCU

Numărul a fiind de n cifre vom avea:

$$a\, a = a(10^n + 1) = u^2.$$

Vom lua deci:

$$10^n + 1 = a\, p^2.$$

Pentru a determina pe a, trebue găsite numerile de forma $10^n + 1$, cari au ca divizor un pătrat perfect.

Pentru $p = 2, 3, 5$ nu sunt soluţiuni, căci numărul $10^n + 1$, nu se împarte cu 2, 3 şi 5.

Pentru $p = 7$, după teorema lui *Euler*[1]), vom avea:

$$10^{42} - 1 = m \,.\, 49,$$

sau:

$$(10^{21} - 1)\ (10^{21} + 1) = m \,.\, 49.$$

Cum numerile $10^{21} - 1$ şi $10^{21} + 1$ sunt prime între ele, urmează că $10^{21} - 1$ sau $10^{21} + 1$, trebue să se împartă cu 49.

In cazul de faţă $10^{21} + 1$ se împarte cu 49 şi avem:

$$10^{21} + 1 = 49 \times 20408163265306122449 = 49\, a.$$

Numărul a găsit este de 19 cifre şi cum $n = 21$, urmează că înaintea numărului a trebue pus două zeruri şi ast-fel vom avea numărul $a\, a$ de 40 cifre, care este un pătrat perfect.

Odată acest pătrat găsit, vom găsi o infinitate în modul următor.

Din relaţiunea $10^{42} - 1 = m\, 49$, care se mai poate scri cu ajutorul congruenţilor:

$$10^{42} \equiv 1 \pmod{49}$$

şi din relaţiunea gasită:

$$10^{21} \equiv -1 \pmod{49},$$

avem prin inmulţire:

$$10^{42k+21} \equiv -1 \pmod{49},$$

unde dând lui k toate valorile întregi, vom găsi o înfinitate de valori pentru a.

[1]) Dacă A este prim cu B, atunci $A^k - 1 = m \,.\, B$, k reprezentând numărul întregilor inferiori lui B şi primi cu el.

Pentru $p = 11$, găsim o soluţie mai mică în modul următor:

După *Euler*, avem:

$$10^{110} \equiv 1 \pmod{121},$$

sau:

$$10^{55} \equiv \pm 1 \pmod{121}.$$

In cazul de faţă $10^{55} \equiv -1 \pmod{121}$, dar cum exponentul 55 este impar se poate ca să avem:

$$10^5 \equiv -1, \quad \text{sau} \quad 10^{11} \equiv -1 \pmod{121}.$$

Numărul $10^{11} + 1$ se împarte cu 121 şi găsim:

$$10^{11} + 1 = 121 \times 82644671,$$

unde numărul a are 10 cifre şi deci numărul $a\,a$ va avea 21 cifre, care cred că este cel mai mic.

Cu numărul 11 găsim două serii de numere pentru valorile lui a şi anume:

$$10^{110k+11} \equiv -1 \pmod{121}$$

$$10^{110k+55} \equiv -1 \pmod{121}.$$

In modul acesta obţinem soluţiuni ale problemei propuse; însă în problemele nedeterminate, chestiunea principală nu este de-a găsi soluţiuni, ci de-a găsi toate soluţiunile problemei.

Pentru aceasta vom reaminti câte-va chestiuni cunoscute, relativ la congruenţa, $z^2 \equiv 10 \pmod{p}$.

I.

1. Congruenţa $z^2 \equiv 10 \pmod{p}$, p fiind prim, este posibilă când vom avea:

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Această condiţiune se mai poate scri şi cu ajutorul simbolului lui *Legendre:*

$$\left(\frac{10}{p}\right) = 10^{\frac{p-1}{1}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dacă această condiţiune este împlinită, atunci 10 se zice că este rezidiu lui p.

După teorema lui *Fermat*:

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

avem:

$$\left(10^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(10^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p}$$

din care deducem că:

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1, \quad \text{sau} \quad 10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p},$$

prin urmare simbolul lui *Legendre* $\left(\frac{10}{p}\right)$ nu poate se fi egal de cât ± 1.

In cazul când este egal cu $+1$, atunci 10 este rezidiu lui p, iar în cazul când este egal cu -1, 10 este nerezidiu a lui p.

2. Simbolul lui *Legendre* $\left(\frac{10}{p}\right)$ se mai poate scri:

$$\left(\frac{10}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right)$$

şi pentru ca $\left(\frac{10}{p}\right) = 1$ trebue să avem 2 cazuri:

(1) $$\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \quad \text{şi} \quad \left(\frac{5}{p}\right) = 1,$$

sau:

(2) $$\left(\frac{2}{p}\right) = -1 \quad \text{şi} \quad \left(\frac{5}{p}\right) = -1,$$

adică 10 este rezidiu lui p, atunci când 2 şi 5 sunt amândoi rezidiu lui p, sau amândoi nerezidiu lui p.

3. Se dovedeşte uşor că:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

din care rezultă că dacă $p = 8k \pm 1$, expresia $\frac{p^2-1}{8}$ este pară şi deci $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ şi pentru $p = 8k \pm 3$, expresiunea $\frac{p^2-1}{8}$ este impară şi deci $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$.

Rezultă deci că 2 este rezidiu pentru toate numerile prime de forma $8k \pm 1$ şi nerezidiu pentru toate numerile prime de forma $8k \pm 3$.

4. Din legea reciprocităţii a lui *Legendre*, avem:

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$$

şi cum rezidiu impar a lui 5, nu este de cât ± 1, urmează că 5 va fi rezidiu numerilor prime de forma $5k \pm 1$.

5. Rezultă din (3) şi (4), pentru ca 10 să fie rezidiu lui p, trebue ca numărul p prim, să facă parte din o progresie aritmetică a cărei raţie este 40.

Pentru a găsi toate aceste numere p, vom lua

toate numerile impare mai mici ca 20, din care vom elimina pe acelea cari sunt 5 sau multiplu de 5 şi cu ele vom forma următoarele progresii aritmetice:

$40m \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 9,\ \pm 11,\ \pm 13,\ \pm 17,\ \pm 19.$

In aceste 16 progresiuni se găsesc toate numerile prime, afară de 2 şi 5.

Numerile prime cuprinse în progresiunile:

$$40m \pm 1,\ \pm 7,\ \pm 9,\ \pm 17,$$

fiind de forma $8k \pm 1$, au pe 2 ca rezidiu, iar numerile prime cuprinse în progresiile:

$$40m \pm 3,\ \pm 11,\ \pm 13,\ \pm 19,$$

fiind toate de forme $8k \pm 3$ au pe 2 ca nerezidiu.

Numerile prime cuprinse în progresiile:

$$40m \pm 1,\ \pm 9,\ \pm 11,\ \pm 19$$

fiind de forma $5k \pm 1$, au pe 5 ca rezidiu, iar numerile prime cuprinse în progresiile:

$$40m \pm 3,\ \pm 7,\ \pm 13,\ +17,$$

fiind de forma $5k \pm 2$, au pe 5 ca nerezidiu.

Rezultă deci că numerile prime de forma:

$40m \pm 1$ şi $40m \pm 9$, au pe 10 ca rezidiu,

pentru că'l au şi pe 2 şi pe 5 ca rezidiu, iar numerile prime de forma: $40m \pm 3,\ \pm 13$ au pe 10 ca rezidiu, pentru că au pe 2 şi 5 ca nerezidiu. Celelalte numere prime cuprinse în progresiile: $40m \pm 7,\ \pm 11,\ \pm 17,\ \pm 19$, au pe 10 ca nerezidiu.

6. In cazul când p este un număr compus, condiţiunea necesară şi suficientă după *Iacobi*, pentru ca 10 să fie rezidiu, trebue ca 10 să fie rezidiu al fie-cărui factor al lui p.

II.

1. Să revenim la problema noastră, anume, când congruenţa $10^n \equiv -1 \pmod p$ este posibilă.

In 5. am văzut că numerile prime de forma:

$$40m \pm 7,\ \pm 11,\ \pm 17,\ \pm 19,$$

au pe 10 ca nerezidiu şi deci în acest caz vom avea:

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p.$$

Rezultă deci, că numerile prime din aceste 8 progresii, dau soluţii pentru problema noastră şi acele soluţii sunt:

$$\frac{10^{\frac{\varphi(p^2)}{2}}+1}{p^2} = a.$$

2. Dacă numerile prime sunt de forma:

$40m-1,\ 40m+3,\ 40m-9$ şi $40m-13$,

atunci 10 este un rezidiu al lor şi deci vom avea:

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p.$$

Cum aceste numere sunt toate de forma $4k+3$, urmează că $\frac{p-1}{2}$ va fi în totdeauna impar, în acest caz nu vom avea soluţiuni, căci dacă ar exista un număr q pentru care să avem:

$$10^q \equiv -1 \pmod p,$$

q este impar, căci este în totdeauna un divizor al lui $\frac{p-1}{2}$ şi dacă am ridica congruenţa:

$$10^q \equiv -1 \pmod p,$$

la puterea $\frac{p-1}{2q}$, am avea:

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p,$$

ceeace este imposibil.

Rezultă deci că pentru numerile prime de forma:

$$40m-1,\ +3,\ -9,\ -13,$$

problema nu are soluţiuni.

3. Ne-a mai rămas de cercetat numerile prime de forma:

$$40m+1,\ -3,\ +9 \text{ şi } +13.$$

Pentru numerile prime de forma:

$$40m-3 \text{ şi } 40m+13,$$

vom avea:

$$10^{20m-2} \equiv 1 \text{ şi } 10^{20m+6} \equiv 1 \pmod p.$$

Din acestea deducem:

$$\begin{aligned}(10^{10m-1}-1)(10^{10m-1}+1) &\equiv 0\\ (10^{10m+3}-1)(10^{10m+3}+1) &\equiv 0\end{aligned} \pmod p$$

Dacă:

$$10^{10m-1} \equiv 1 \text{ şi } 10^{10m+3} \equiv 1 \pmod p,$$

atunci nu avem soluțiuni, în caz contrar avem soluțiuni pentru $n=\frac{\varphi(p^2)}{4}$.

Pentru numerile prime de forma $40m+9$, vom avea:

$$10^{20m+4}\equiv 1 \pmod p.$$

Aceasta o putem scri:

$$(10^{10m+2}-1)(10^{10m+2}+1)\equiv 0 \pmod p.$$

Se pot întâmpla două cazuri:

Cazul:

$$10^{10m+2}\equiv -1 \pmod p,$$

atunci problema are soluții pentru:

$$n=\frac{\varphi(p^2)}{4}.$$

Cazul:

$$10^{10m+2}\equiv 1 \pmod p,$$

atunci vom avea:

$$(10^{5m+1}-1)(10^{5m+1})\equiv 0 \pmod p.$$

Dacă:

$$10^{5m+1}\equiv 1 \pmod p,$$

nu avem soluții, iar dacă avem:

$$10^{5m+1}\equiv -1 \pmod p,$$

avem soluții pentru $n=\frac{\varphi(p^2)}{8}$.

Pentru numerile de forma $40m+1$ deosebim două cazuri, după cum m este impar sau de forma $m=2^k m'$.

Când m este impar, vom avea:

$$10^{20m}\equiv 1 \pmod p,$$

care se descompune în:

$$10^{10m}\equiv \pm 1 \pmod p,$$

Dacă:

$$10^{10m}\equiv -1 \pmod p,$$

atunci problema are soluții generale:

$$n=\frac{\varphi(p^2)}{4},$$

iar dacă:

$$10^{m}\equiv 1 \pmod p,$$

atunci și aceasta se descompune în:

$$10^{5m}\equiv \pm 1$$

și dacă vom avea:

$10^{5m}\equiv -1$, avem soluții pentru $n=\frac{\varphi(p^2)}{8}$,

în caz contrar nu avem soluții.

Când $m=2^k m'$, trebue să încercăm pe rând toate congruențele de forma:

$$10^{10.2^k m'}\equiv 10^{5.2^k m'}\equiv 10^{5.2^{k-1}m'}=10^{5.2^{k-2}m'}\ldots$$

$$\ldots\equiv 10^{5m'}\equiv \pm 1 \pmod p$$

și dacă nici una din aceste congruențe nu este $\equiv -1 \pmod p$, atunci nu avem soluții.

4. In cazul când p este compus, trebue ca toți factori lui să facă parte din cei găsite mai sus.

Gh. Constantinescu

1283. — *Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinele ecuației:*

$$x^2+px+q=0$$

și y_1, y_2 sunt rădăcinile ecuației:

$$(16q-12p+9)y^2-4(3-2p)y+4=0,$$

să se arate că între rădăcinele celor două ecuații, avem relația:

$$4(x_1y_2+x_2y_1)+3(y_1+y_2)=4.$$

V. Alaci

Observăm că putem scri:

$$2(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(x_1-x_2)(y_1-y_2)$$

și primul membru al identității cerute, pe care să'l notăm cu E, se poate scri:

$$(1)\quad E=2(x_1+x_2)(y_1+y_2)-2(x_1-x_2)(y_1-y_2)+3(y_1+y_2).$$

De altă parte, ținând seamă de relațiile ce există între rădăcinele și coeficienții unei ecuații, putem scri privind cele două ecuații din enunț:

$$(2)\quad x_1+x_2=-p,\quad y_1+y_2=\frac{4(3-2p)}{16q-12p+9}.$$

Tot astfel putem scri, din expresiunea rădăcinelor:

$$(3)\quad x_1-x_2=\pm\sqrt{p^2-4q}$$

$$y_1-y_2=\pm\frac{2\sqrt{4(3-2p)^2-4(16q-12p+9)}}{16q-12p+9}$$

$$=\pm\frac{4\sqrt{9-12p+4p^2-16q+12p-9}}{16q-12p+9}$$

$$\pm\frac{4\sqrt{4p^2-16q}}{16q-12p+9}=\pm\frac{8\sqrt{p^2-4q}}{16q-12p+9}$$

In virtutea relaţiilor (2) şi (3), relaţia (1) devine:

$$E=2(-p)\frac{4(3-2p)}{16q-12p+9}-2(\pm\sqrt{p^2-4q})\times$$

$$\frac{\pm 8\sqrt{p^2-4q}}{16q-12p+9}+3\frac{4(3-2p)}{16q-12p+9}=$$

$$\frac{-8p(3-2p)-16(p^2-4q)+12(3-2p)}{16q-12p+9}=$$

$$\frac{-24p+16p^2-16p^2+64q+36-24p}{16q-12p+9}=$$

$$\frac{4(16q-12p+9)}{16q-12p+9)}=4.$$

Avem astfel stabilită identitatea dată.

Soluţii date de d-nii: *Burghelea V. Stelian* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cătuneanu M. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Cehan G. Aristide* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Cioc I. D-tru* (lic. Milit., Craiova).

Soluţia 2-a. Rădăcinele celor două ecuaţii date, sunt:

$$(1)\qquad x_{1,2}=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

$$y_{1,2}=\frac{2(3-2p)\pm\sqrt{4(3-2p)^2-4(16q-12p+9)}}{16q-12p+9}$$

$$=\frac{6-4p\pm 4\sqrt{p^2-4q}}{16q-12p+9}.$$

Inmulţind aci cu conjugata numărătorului şi numitorul şi numărătorul lui $y_{1,2}$, avem ţinând seamă de (1):

$$y_{1,2}=\frac{(6-4p)^2-16(p^2-4q)}{(16q-12p+9)(6-4p\mp 4\sqrt{p^2-4q})}$$

$$=\frac{36-48p+16p^2-16p^2+64q}{(16q-12p+9)(6-4p\mp 4\sqrt{p^2-4q})}$$

$$=\frac{4(16q-12p+9)}{(16q-12p+9)(6-4p\mp 4\sqrt{p^2-4q})}$$

$$=\frac{2}{3-2p\mp 2\sqrt{p^2-4q}}=$$

$$\frac{2}{3+4\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}}=\frac{2}{3+4x_{1,2}}.$$

De aci urmează că putem lua:

$$y_1=\frac{2}{3+4x_2},\qquad y_2=\frac{2}{3+4x_1},$$

Aceste relaţii aduse la forma întreagă, devin:

$$3y_1+4x_2y_1=2$$

$$3y_2+4x_1y_2=2,$$

pe care adunându-le obţinem:

$$4(x_1y_2+x_2y_1)+3(y_1+y_2)=4,$$

care este tocmai identitatea dată.

Au dat soluţii în acest fel, d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* Craiova), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş).

Alte soluţii, obţinute înlocuind în identitatea dată pe x_1, x_2; y_1, y_2 prin rădăcinele ecuaţiilor date, găsite de d-ra: *Popescu N. Maria* (studentă) şi de d-nii: *Amăricâ Tibul* (lic. Milit., Cernăuţi), *Andrunachievici Vladimir* (lic. Alecu Russu, Chişinău), *Căsoeanu Carol* (lic. Milit., Cernăuţi), *Chiriac I. Simion* (lic. Huşi), *Cornescu Emil* (lic. Milit., Cernăuţi), *Godeanu Ig. Vasile* (Şc. Milit., de Artilerie), *Iliescu B. D-tru* (lic. Milit., Cernăuţi), *Mărgărint G. Gheorghe* (lic. Milit., Cernăuţi), *Millu I. Nicolae*, *Murgu M.* (lic. Beiuş), *Nicoară C.* (lic. Milit., Cernăuţi), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu Greaca-Vlad* (lic. Milit., Cernăuţi), *Postelnicescu C. M.* (lic. Milit, N. Filipescu), *Trăsnitu Nicolae* (lic Milit., Cernăuţi), *Vasilescu C. Nicolae* (Târgu-Jiu), *Vasiliu I. Mircea* (lic. Milit., Cernăuţi) şi *Verenca Silviu* (lic. Milit., Cernăuţi).

1366. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases}(ay-\Sigma x)(az-\Sigma x)=b^2\\(az-\Sigma x)(ax-\Sigma x)=c^2\\(ax-\Sigma x)(ay-\Sigma x)=d^2\end{cases}$$

C. BARDAN

Inmulţind aceste ecuaţii şi apoi extrăgând rădăcina patrată, obţinem:

$$(ax-\Sigma x)(ay-\Sigma x)(az-\Sigma x)=\pm bcd.$$

Impărţind aceasta ecuaţie pe rând cu ecua iile sistemului dat, obţinem sistemul echivalent:

$$(1)\qquad\begin{cases}ax-\Sigma x=\pm\dfrac{cd}{b}\\ay-\Sigma x=\pm\dfrac{bd}{c}\\az-\Sigma x=\pm\dfrac{bc}{d},\end{cases}$$

unde în membrii al 2-lea vom lua simultan sau semnul + sau —, fiind că produsele a câte două din aceste ecuaţii sunt pozitive, ceea ce reiasă privind ecuaţiile sistemului dat, a, b, c, d fiind presupuse numere reale.

Adunând ecuațiile sistemului (1), găsim:

$$a\Sigma x - 3\Sigma x = \pm\frac{c^2d^2+b^2d^2+b^2c^2}{bcd}.$$

De aci deducem:

$$\Sigma x = \pm\frac{c^2d^2+b^2d^2+b^2c^2}{bcd(a-3)}.$$

Inlocuind acestă valoare găsită pentru Σx în ecuațiile sistemului (1), avem:

$$ax = \pm\frac{cd}{b} \pm \frac{c^2d^2+b^2d^2+b^2c^2}{bcd(a-3)},$$

sau:

$$x = \frac{\pm c^2d^2(a-3) \pm c^2d^2 \pm b^2d^2 \pm b^2c^2}{abcd(a-3)},$$

unde luăm simultan sau semnele superioare sau cele inferioare; analog avem pe y și z, care se pot obține și din expresia lui x, permutând circular pe b, c, d.

Rezultă deci pentru sistemul dat, următoarele două sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{c^2d^2(a-2)+b^2d^2+b^2c^2}{abcd(a-3)} \\ y = \pm\dfrac{b^2d^2(a-2)+c^2d^2+b^2c^2}{abcd(a-3)} \\ z = \pm\dfrac{b^2c^2(a-2)+b^2d^2+c^2d^2}{abcd(a-3)} \end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Avram I. Ioan* (lic. Craiova), *Bădoiu M. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Catrina C-tin* (lic. Milit., Craiova), *Cazanacli V. Petre* (Chișinău), *Dobrescu Paul* (lic. Milit., N. Filipescu), *Dulămiță Gr. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Dumitrascu Aureliu* (lic. Milit., Craiova), *Gavrilescu N. C-tin* (Iași), *Ionescu Ilie* (lic. Milit., Craiova), *Lupescu Gh. Corneliu* (Șc. Milit., de Artilerie), *Marica Pompeiu* (lic. Beiuș), *Mihailescu D. Ioan* (lic. Milit, Craiova), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuș), *Moisă I. Ghcorghe*, *Murgu V. Marțian* (lic. Beiuș), *Negrea A. Mircea* (Brăila), *Nicolaescu Nicolae* (lic. Milit., Craiova), *Petrescu-Craiovița Anastasie* (Craiova), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Ștefănescu D. Nicolae* (lic. Milit., N. Filipescu) și *Teofan Iosub* (lic. Milit., Craiova).

1367. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z+u=10 \\ x^2+y^2+z^2+u^2=30 \\ x^4+y^4+z^4+u^4=354 \\ xy+zu=14 \end{cases}$$

VIRGIL CLAUDIAN

Ridicând prima ecuație la patrat și ținând seamă de a 2-a și ultima, putem scri succesiv:

$$100 = x^2+y^2+z^2+u^2+2(xy+xz+xu+yz+yu+zu) = 30+2(xy+zu)+2(x+y)\times(z+u) = 30+28+2(x+y)(z+u)$$

De aci deducem:

$$(x+y)(z+u)=21$$

Astfel avem:

$$\begin{cases} (x+y)+(z+u)=10 \\ (x+y)(z+u)=21 \end{cases}$$

Necunoscutele $x+y, z+u$, având suma și produsul cunoscute, sunt rădăcinele ecuației:

$$t^2-10t+21=0,$$

care rezolvată, ne dă:

$$t = 5 \pm \sqrt{25-21} = 5 \pm 2,$$

de unde urmează:

$$(1)\quad \begin{cases} x+y=7 \\ z+u=3 \end{cases} \quad \text{sau,} \quad (2)\quad \begin{cases} x+y=3 \\ z+u=7 \end{cases}$$

De altă parte, ecuația 3-a a sistemului dat se poate scri:

$$(x^2+y^2)^2+(z^2+u^2)^2-2(x^2y^2+z^2u^2)=354$$

sau încă:

$$(3)\quad [(x+y)^2-2xy]^2+[(z+u)^2-2zu]^2-2(x^2y^2+z^2u^2)=354,$$

care în virtutea ecuațiilor (1) sau (2) devine respectiv:

$$(4)\quad (49-2xy)^2+(9-2zu)^2-2(x^2y^2+z^2u^2)=354,$$

$$(4')\quad (9-2xy)^2+(49-2zu)^2-2(x^2y^2+z^2u^2)=354$$

Ținând seamă că din ultima ecuație a sistemului, avem:

$$(5)\quad xy=14-zu,$$

ecuațiile (4) și (4') devin respectiv:

$$(21+2zu)^2+(9-2zu)^2-2(196-28zu+2z^2u^2)=354$$

$$(2zu-19)^2+(49-2zu)^2-2(196-28zu+2z^2u^2)=354,$$

unde desvoltând calculele și simplificând, obținem respectiv:

(6) $z^2u^2 + 26zu - 56 = 0$

(6') $z^2u^2 - 54zu + 504 = 0$,

care au respectiv rădăcinele:

$$\begin{cases} zu = -28 \\ zu = 2 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} zu = 12 \\ zu = 42, \end{cases}$$

Privind și ecuația (5), rezultă următoarele sisteme de ecuații, după cum am folosit (1) sau (2):

$$(7)\ \begin{cases} x+y=7 \\ z+u=3 \\ xy=42 \\ zu=-28 \end{cases} \qquad (8)\ \begin{cases} x+y=7 \\ z+u=3 \\ xy=12 \\ zu=2 \end{cases}$$

$$(9)\ \begin{cases} x+y=3 \\ z+u=7 \\ xy=2 \\ yz=12 \end{cases} \qquad (10)\ \begin{cases} x+y=3 \\ z+u=7 \\ xy=-28 \\ zu=42 \end{cases}$$

Aceste patru sisteme de ecuații, pe care trebuie să le rezolvăm, sunt echivalente cu sistemul dat.

1°. In fiecare din aceste sisteme, vedem că este cunoscut suma și produsul a câte două din cele patru necunoscute, deci x, y și z, u din sistemul (7) de exemplu, sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor de gradul al 2-lea:

$$t^2 - 7t + 42 = 0$$
$$v^2 - 3v - 28 = 0$$

Cum de aci deducem:

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49-168}}{2} = \frac{7 + i\sqrt{119}}{2}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$v = \frac{3 \pm \sqrt{9+112}}{2} = \frac{3 \pm 11}{2},$$

rezultă următoarile sisteme de soluții pentru sistemul (7), deci și pentru sistemul dat:

x	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$
y	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$
z	7	7	−4	−4
u	−4	−4	7	7

2°. Privind sistemul (8), deducem ca mai sus că x, y și z, u sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor:

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$
$$v^2 - 3v + 2 = 0,$$

cu rădăcinele:

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2}$$

$$v = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

Rezultă de aci, pentru sistemul (8) următoarele sisteme de soluții:

x	4	4	3	3
y	3	3	4	4
z	2	1	2	1
u	1	2	1	2

3°. Sistemul (9) ne dă pe x, y și zu ca rădăcini respectiv a ecuațiilor:

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$
$$v^2 - 7v + 12 = 0,$$

care ne dau:

$$t = \frac{3 \pm 1}{2}, \quad v = \frac{7 \pm 1}{2},$$

deci sistemele de soluții ale sistemului (9) sunt:

x	2	2	1	1
y	1	1	2	2
z	4	3	4	3
u	3	4	3	4

4°. In fine privind sistemul (10), deducem că x, y și z, u sunt respectiv rădăcinele ecuațiilor:

$$t^2 - 3t - 28 = 0$$
$$v^2 - 7v + 42 = 0,$$

cu rădăcinile:

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+112}}{2} = \frac{3 \pm 11}{2}$$

$$v = \frac{7 \pm \sqrt{49-168}}{2} = \frac{7 + i\sqrt{119}}{2}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

Rezultă pentru sistemul (10) următoarele sisteme de soluții:

x	7	7	-4	-4
y	-4	-4	7	7
z	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$
u	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7-i\sqrt{119}}{2}$	$\frac{7+i\sqrt{119}}{2}$

In cele patru tablouri sunt trecute cele 16 sisteme de soluţii ale sistemului de ecuaţii dat.

Soluţii foarte bune date de d-nii: *Cazanacli V. Petre* (Chişinău), *Lupescu Corneliu* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila).

Au găsit numai unele sisteme de soluţii d-ra: *Popescu N. Maria* şi d-nii: *Amărăsteanu F. Marcel* (Craiova), *Andrunachievici V.* (lic. Chişinău), *Hompola I. Tiberiu* (lic. Beiuş), *Mihalcea N. N.* (lic. Beiuş) şi *Popa Nicolae* (lic. Beiuş).

PROBLEME PROPUSE

1457. — a şi b fiind două cifre consecutive, în ce sistem de numeraţie avem?

$$a\,a\,a\,a = (b\,b)^2.$$

V. THÉBAULT

1458. — Dacă numerele $m+n$ şi $m-n$ au acelaşi număr de cifre, numărul:

$$[(m+n)\,0\,(m-n)]^{2p+1}+[(m-n)\,0\,(m+n)]^{2p+1},$$

este divizibil prin $2m$.

G G CONSTANTINESCU

1454.[1] — Se dau în plan, unghiul drept xOy, un punct fix P, o dreaptă Δ care taie pe Oy în A şi un punct M mobil pe Δ. Fie B proecţia lui M pe AP şi N intersecţia lui Δ cu proectanţa lui B pe MP. Se cere locul geometric al ortocentrului triunghiul BMN.

G-L GH. BUICLIU

[1]) Anulăm problema cu acest număr din „R. M. T", an XV, No. 11, care a mai fost propusă sub No. 1437 şi o înlocuim cu prezenta.

1459. — Fie A_1, B_1, C_1 centrele interioare de similitudine ale cercurilor de raze r_1, r_2, r_3 şi cu centrele respectiv în A, B, C; apoi S şi S_1 respectiv ariile triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$.

Să se arate că avem relaţia:

$$1-\frac{S_1}{S}=\sum\frac{r_1^2}{(r_1+r_2)(r_1+r_3)}$$

LOCOT C. D IONESCU-ŢIU

1460. — Să se construiască graficul ecuaţiei:

$$x\,\frac{x+|x|}{2}+y\,\frac{y+|y|}{2}=1.$$

Să se arate că ecuaţia:

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{y+|y|}{2}\right)^2=1$$

are aceiaşi reprezentare grafică. Să se explice rezultatul.

N O. ZAHARIA

1461. — Să se rezolve sistemul:

$$x(y^2-z^2)-x^2(y+z)+y^3+z^3=25$$
$$y(z^2-x^2)-y^2(z+z)+z^3+x^3=28$$
$$z(x^2-y^2)-z^2(x+y)+z^3+y^3=27$$

ADRIAN POPESCU

1462. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(x-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)'=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}},$$

unde $(f(x))'$ înseamnă derivata funcţiunei $f(x)$.

V. ALACI

1463. — Între unghiurile unui triunghiu avem relaţiile:

$$1-8\cos A\cos B\cos C=\sin^2(B-C)+(\cos A-2\cos B\cos C)^2$$
$$1+8\cos A\sin B\sin C=\sin^2(B-C)+(\cos A+2\sin B\sin C)^2$$

N. N. MIHAILEANU

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetica şi Teoria Numerelor.

		Pag.
G-l Gh. Buicliu	Numere ale căror patrate se termină cu cifre în progresii aritmetice sau geometrice . . .	37
I. V. Mătieş	Separarea numerelor după ultimul grup al patratelor cuburilor şi bipatratelor lor . .	61
I. V. Mătieş şi E. Vişa	Restul împărţirii numerelor întregi	97
Gh. Constantinescu	Patrate remarcabile	122
A. Gloden	Sur quelques règles de divisibilité	133

b) Algebra.

T. Popoviciu	Despre extragerea rădăcinii dintr'un polinom de o variabilă independentă	49
T. Popoviciu	Despre funcţiunile alternate de mai multe variabiie independente	73
B. I. Baidaff	Eliminarea folosită la progresiile aritmetice, geometrice şi la succesiuni mai generale . .	85
V. Alaci	Dare de seamă despre o lucrare a d-lui Profesor *C O. Oakley*	109

c) Geometria.

V. Thébault	Sur les bissectrices du triangle	3, 25
V. Thébault	Triangle bordé de triangles équilatéraux	51
I. V. Mătieş	Asupra unor probleme de examen	62
V. Thébault	Sur le point de *Feuerbach* . .	121
G-l Gh. Buicliu	O particularitate a triunghiurilor dreptunghice	134

d) Trigonometrie.

C. Ivănescu	O transformare a relaţiilor trigonometrice	13

e) Geometrie analitică.

C. Coşniţă	Asupra unor cercuri	88

f) Filozofie Matematică.

N. O. Zaharia	Domeniul Matematicilor în clasificarea lui *Auguste Comte*	4, 16, 26

g) Diverse.

V. Alaci	Patruzeci de ani de activitate a *„Gazetei Matematice“* . . .	85

II. REDACŢIONALE.

* * *	Comitetul de conducere al *Revistei Matematice din Timişoara*	1

III. NOTE MATEMATICE.

a) Aritmetica şi Teoria Numerelor.

			Pag.
9.[1]	**I. V. Mătieş**	Asupra problemei 1185 din „R. M T“.	53
10.	**M. Botez**	O formulă de transformare a fracţiunilor zecimale în funcţiuni de un sistem oarecare de numărare	54
12.	**A. Gloden**	Décomposition des nombres premiers de la forme $4n+1$ et de leurs puissances en une somme de deux carré . .	76
16.	**V. Thébault**	Sur de carrés curieux . . .	100
18.	**A. Gloden**	Sur deux équations diophantiennes	113
20.	**A. Gloden**	Sur deux équations diophantiennes	126
21.	**G-l Gh. Buicliu**	Divizibilitatea prin 3 într-o bază oarecare de numeraţie . .	135
22.	**Maior I. Linteş**	Asupra câtorva expresiuni cu factoriale	135

b) Geometrie.

1.	**Col. Gh. Buicliu**	Reciproca unei teorema de geometrie	6
3.	**V. Thébault**	Sur le tetraèdre isoscèle . .	18
5.	**V. Thébault**	Sur le triangle dont les sommets sont les pieds des bissectrices intérieures d'un triangle . .	28
11.	**V. Thébault**	Sur une expression de la distance de l'ortocentre au centre du cercle circonscrit à un triangle	65
13.	**V Thébault**	Diamètres remarquables du cercle circonscrit à au un triangle .	77
14.	**V. Thébault**	Point limites de *Poncelet* des cercles inscrits et circonscrits au triangle	89
15.	**G. G. Constantinescu**	Asupra unei teoreme a lui *Manheim*	90
17.	**V. Thébault**	Rectangle et parallélipipèd rectangle	100
23.	**N. O. Zaharia**	Asupra unor serii cu termeni pozitivi	135

c) Algebra.

7.	**V. Mioc**	Asupra problemei 425 „R. M. T.“ vol. V, pag. 45	40
8.	**G. G. Constantinescu**	Generalizarea problemei 1310	41

d) Trigonometrie.

2.	**I. M. Predoescu**	Câteva identităţi trigonometrice	6
6.	**C. Ivănescu**	Asupra unor relaţii trigonometrice	29

e) Geometrie analitică.

4.	**M. Botez**	Asupra unor transformări hiperbolice	18

[1]) In această coloană sunt înscrise numerele de ordine ale notelor.

f) Diverse.

		Pag.
19. N. O. Zaharia	Recenzie	113

III. BIBLIOGRAFII.

N. Abramescu	Astronomie pentru clasa VII .	91
N. Abramescu	Lecţiuni elementare de Algebră superioară pentru cl. VIII .	9
N. Abramescu	Algebra financiară pentru cl. VI	101
N. Abramescu	Algebra superioară pentru cl. VII ştiinţifică	101
N. Abramescu	Mecanica pentru cl VIII . .	101
Pl. Andronescu	Le problème du dimensionement des grandeurs électriques et magnétiques	42
Pl. Andronescu	Beitrag zur Problem der Wechselströme beliebiger Kurvenform	115
Boletin Matematico	7, 42, 66, 78, 91, 101,	137
C. Budeanu	Sur le fonctionnement d'un apparail déformant . .	19
Bulletin de Mathématiques et de **Physiques** pures et appliquées de l'École Polytechnique *Roi Carol II* .		114
Bulletin Mathématique de la Société roumaine des sciences		91
G. G. Constantinesco	La réfraction astronomique .	19
J. G. Galé	Matematicas Financieras . .	66
Gazeta Matematică	7, 19, 31, 42, 54, 78, 91, 101,	114, 126, 137
Gazeta Matematică	Supliment cu exerciţii 91, 101,	126
Gh. Th. Gheorghiu	Sur certaines fonctions attachées aux fonctions métasphériques	31
Gh. Th. Gheorghiu	Fonctions métasphériques et leur extension	31
Gh. Th. Gheorghiu	Sur un cas spécial des fonctions métasphériques	31
Gh. Th. Gheorghiu	Sur les fonctions métasphériques	31
M. Ghermănesco	Sur les moyennes successives des fonctions	7
M. Ghermănesco	Sur l'équation $\Delta u = \lambda u$ . .	7
A. Gioden	Sur la décomposition des puissances des nombres premiers	115
C. Iacob	Sur un problème concernant les jets gezeux	78
C. Iacob	Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites	78
C. Iacob	Sur le problème de *Dirichlet* pour les fonctions de plusieurs variables complexes . . .	115
C. Iacob	Sur un problème de *Dirichlet-Neumann* pour les fonctions de deux variables complexes	115
C. Iacob	Sur un problème de la Théorie des sillages	115
C. Iacob	Sur quelques problèmes mixtes dans une couronne circulaire	115
C. Iacob	Sur quelques propriètés de la solution générale d'une problème de MM. *H. Villat* et *R. Thlry*	115
C. Iacob	Sur quelques problèmes généralisés de *Dirichlet-Neumann* pour les aires multiplements connexes	115
T. Lalescu	Culegere de probleme geometrie descriptivă	7, 31
D. Leonida şi **N. Caranfil**	Din istoricul instalaţiunilor technice ale Municipiului Bucureşti	115
Maior I. Linteş	Caracteristicile şi posibilităţile aviaţiei în legătură cu A. C. A.	91
Maior I. Linteş	Noutăţi în construcţia gurilor de foc	91
Maior I. Linteş	Studiul teoretic al unui proectil	91
Maior I. Linteş	Problema preciziunii gurilor de foc	91
Al. Manicatide şi **N. Abramescu**	Algebra pentru cl. IV	101
Al. Manicatide şi **N. Abramescu**	Algebra pentru cl. V	101
Alex. Nicolesco	Courbes sphériques, courbes *d'Enneper* et de *M. Tzitzeica*	115
Numerus	54, 91, 115, 126,	137
Al. Th. Popesco	Note sur l'article de M. *E. Abason*	101
Revista cercului de studii al Şcoalei Sup. P. T. T. Timişoara 7, 19, 31, 42, 78, 115,		126
Ştiinţă şi Progres	7, 19, 31, 54, 101, 115, 126,	137
C. C. Teodoresco	Nouvel emploi des moments d'inertie aux questions statistiques	78
C. C. Teodoresco	Allocution a l'occasion du congrès interbalcanique . . .	78
O. N. Ţino, M. Ch. Teohari şi **V. I. Bădulescu**	Lecţiuni de Aritmetică pentru clasa II	91
O. N. Ţino, M. Ch. Teohari şi **V. I. Bădulescu**	Lecţiuni de Geometrie plană pentru cl. III	91
O. N. Ţino, M. Ch. Teohari şi **V. I. Bădulescu**	Lecţiuni de geometrie în spaţiu pentru cl. IV.	91
N. O. Zaharia	*G. Boulgand, Ch. Brunold, A. Grumbach, M. Moraud, P. Sergescu, M. Taboury, A. Turpain.* L'évolution des sciences physiques et mathématiques	113

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN.

Şcoala Politechnică din Timişoara. Examen de intrare în anul pregătitor. Octomvrie 1935 . . 101

Şcoala Navală. Chestiuni propuse la examenul de admitere în anul 1935 114

V. DIVERSE INFORMAŢIUNI.

Şedinţele Societăţii Ştiinţifice de la Şcoala Politechnică din Timişoara 42

Şedinţele Asociaţiei profesorilor de Matematici din Timişoara 42

VI. PROBLEME PROPUSE ŞI REZOLVATE.

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XV. Problemelor care nu au nimic în coloana 4), nu li s'a publicat încă soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	
92	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	14	II	
109	14	„	
110	14	„	
114	30	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
154	78	„	
164	94	„	
165	94	„	
174	110	„	
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
184	126	„	19
185	126	„	
186	142	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
199	158	„	31
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	„	
248	46	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	
275	94	„	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
299	142	„	
310	174	„	54

1)	2).	3).	4).
313	174	III	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	7
334	14	IV	115
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	43
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V	
440	30	„	
444	30	„	
445	46	„	137
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
478	94	„	
479	94	„	
481	110	„	91
489	126	„	
507	158	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
527	14	VI	
528	14	„	
531	14	„	
	122	IX	
535	30	VI	
541	46	„	

1).	2).	3).	4).
542	46	VI	
543	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII	
628	38	„	
	112	„	
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	
646	70	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
667	134	„	
686	134	„	
695	190	„	
762	126	VIII	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
823	48	IX	
832	60	„	
847	84	„	
851	96	„	
853	96	„	
858	108	„	
860	108	„	
867	122	„	
879	144	„	
882	144	„	126
908	36	X	
916	48	„	
923	60	„	
924	60	„	
929	72	„	
938	84	„	
939	84	„	

1).	2).	3).	4).
951	107	X	
953	107	„	
954	108	„	
956	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
974	138	„	
976	138	„	127
979	138	„	
982	12	XI	
984	12	„	
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	
1008	48	„	
1009	48	„	
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1023	72	„	
1027	72	„	
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1046	96	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1077	138	„	
1085	12	XII	
1093	24	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1113	60	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1119	60	„	
1125	72	„	
1126	72	„	
1128	72	„	127 *)
1129	84	„	
1133	84	„	
1134	84	„	
1140	96	„	
1141	96	„	
1142	96	„	
1145	96	„	
1146	108	„	

*) I s'a mai publicat soluţia la pag. 71. Vol. XIII.

1).	2).	3)	4).
1149 .	108 .	XII	
1156 .	120 .	„	
1157 .	120 .	„	
1158 .	120 .	„	
1160 .	120 .	„	
1161 .	132 .	„	
1163 .	132 .	„	
1165 .	132 .	„	44
1166 .	132 .	„	
1167 .	132 .	„	
1168 .	132 .	„	56
1171 .	138 .	„	20
1173 .	138 .	„	
1174 .	138 .	„	
1182 .	12 .	XIII	
1183 .	12 .	„	
1184 .	12 .	„	10
1187 .	24 .	„	
1188 .	24 .	„	
1189 .	24 .	„	20
1190 .	24 .	„	10
1195 .	36 .	„	
1196 .	36 .	„	22
1198 .	36 .	„	
1201 .	48 .	„	57
1205 .	48 .	„	
1206 .	48 .	„	
1212 .	60 .	„	
1213 .	60 .	„	
1216 .	60 .	„	
1218 .	72 .	„	
1219 .	72 .	„	
1220 .	72 .	„	
1223 .	72 .	„	
1224 .	72 .	„	
1225 .	84 .	„	
1228 .	84 .	„	
1229 .	84 .	„	
1231 .	84 .	„	
1234 .	96 .	„	
1236 .	96 .	„	
1238 .	96 .	„	57
1241 .	108 .	„	
1243 .	108 .	„	
1245 .	108 .	„	
1248 .	120 .	„	
1250 .	120 .	„	
1251 .	120 .	„	116
1253 .	120 .	„	
1255 .	120 .	„	11
1258 .	132 .	„	
1259 .	132 .	„	66
1262 .	132 .	„	
1263 .	132 .	„	
1266 .	141 .	„	

1).	2).	3).	4).
1267 .	141 .	XIII	
	12 .	XIV	
1268 .	141 .	XIII	
1269 .	141 .	„	101
1270 .	141 .	„	
1272 .	12 .	XIV	
1273 .	12 .	„	32
1274 .	12 .	„	
1275 .	12 .	„	
1276 .	12 .	„	23
1277 .	12 .	„	33
1278 .	12 .	„	35
1279 .	12 .	„	
1280 .	24 .	„	
1281	24 .	„	
1282 .	24 .	„	
1283 .	24 .	„	140
1284 .	24 .	„	67
1285 .	24 .	„	68
1286 .	24 .	„	70
1287 .	24 .	„	70
1288 .	36 .	„	79
1289 .	36 .	„	
1290 .	36 .	„	
1291 .	36 .	„	
1292 .	36 .	„	
1293 .	36 .	„	128
1294 .	36 .	„	
1295 .	36 .	„	
1296 .	52 .	„	
1297 .	52 .	„	
1298 .	52 .	„	
1299	52 .	„	
1300 .	52 .	„	
1301 .	52 .	„	80
1302 .	52 .	„	130
1303 .	52 .	„	45
1304 .	64 .	„	46
1305 .	64 .	„	
1306 .	64 .	„	
1307 .	64 .	„	
1308 .	64 .	„	
1309 .	64 .	„	
1310 .	64 .	„	35
1311 .	64 .	„	
1312 .	76 .	„	46
1313 .	76 .	„	59
	88 .	„	
1314 .	76 .	„	81
1315 .	76 .	„	
1316 .	76 .	„	46
1317 .	76 .	„	47
1318 .	76 .	„	71
1319 .	76 .	„	

1).	2).	3).	4).
1320 .	88 .	XIV	94
1321 .	88 .	„	71
1322 .	88 .	„	
1323 .	88 .	„	
1324 .	88 .	„	94
1325 .	88 .	„	
1326	88 .	„	95
1327 .	88 .	„	
1328 .	88	„	82
1329 .	100 .	„	
1330 .	100 .	„	83
1331 .	100 .	„	
1332 .	100 .	„	102
1333 .	100 .	„	
1334 .	100 .	„	
1335 .	100 .	„	83
1336 .	100 .	„	103
1337 .	112 .	„	
1338 .	112 .	„	104
1339 .	112 .	„	116
1340 .	112 .	„	105
1341 .	112 .	„	
1343 .	112 .	„	
1344 .	112 .	„	106
1345 .	124 .	„	
1346 .	124 .	„	
1347 .	124 .	„	130
1348*).	124 .	„	118
1349 .	124 .	„	
1350 .	124 .	„	
1351 .	124 .	„	
1352 .	124 .	„	106
1353 .	136 .	„	107
1354 .	136 .	„	
1355 .	136 .	„	107
1356 .	136 .	„	
1357 .	136 .	„	
1358	136 .	„	119
1359 .	136 .	„	
1360 .	136 .	„	130
1361 .	148 .	„	131
1362 .	148 .	„	132
1363 .	148 .	„	
1364 .	148 .	„	
1365 .	148 .	„	
1366 .	148 .	„	141
1367 .	148 .	„	142
1368 .	148 .	„	
1369 .	12 .	XV	
1370 .	12 .	„	
1371 .	12 .	„	
1372 .	12 .	„	

1).	2).	3).	4).
1373 .	12 .	XV	
1374 .	12 .	„	
1375 .	12 .	„	
1376 .	12 .	„	
1377 .	24 .	„	
1378 .	24 .	„	
1379 .	24 .	„	
1380 .	24 .	„	
1381 .	24 .	„	
1382 .	24 .	„	
1383 .	24 .	„	
1384 .	24 .	„	
1385 .	36 .	„	
1386 .	36 .	„	
1387 .	36 .	„	
1388 .	36 .	„	
1389 .	36 .	„	
1390 .	36 .	„	
1391 .	36 .	„	
1392 .	36 .	„	
1393 .	48 .	„	
1394 .	48 .	„	119
1395 .	48 .	„	
1396 .	48 .	„	
1397 .	48 .	„	
1398 .	48 .	„	
1399 .	48 .	„	
1400 .	48 .	„	
1401 .	60 .	„	
1402 .	60 .	„	
1403 .	60 .	„	
1404 .	60 .	„	
1405 .	60 .	„	
1406 .	60 .	„	
1407 .	60 .	„	
1408 .	60 .	„	
1409 .	72 .	„	
1410 .	72 .	„	
1411 .	72 .	„	
1412 .	72 .	„	
1413 .	72 .	„	
1414 .	72 .	„	
1415 .	72 .	„	
1416 .	72 .	„	
1417 .	84 .	„	
1418 .	84 .	„	
1419 .	84 .	„	
1420 .	84 .	„	
1421 .	84 .	„	
1422 .	84 .	„	
1423 .	84 .	„	
1424 .	84 .	„	

*) Vezi erata pag. 12, Vol. XV.

1).	2).	3).	4).
1425 .	96 .	XV	
1426 .	96 .	„	
1427 .	96 .	„	
1428 .	96 .	„	
1429 .	96 .	„	
1430 .	96 .	„	
1431 .	96 .	„	
1432 .	96 .	„	
1433 .	107 .	„	
1434 .	108 .	„	
1435 .	108 .	„	

1).	2).	3).	4.)
1436 .	108 .	XV	
1437 .	108 .	„	
1438 .	108 .	„	
1439 .	108 .	„	
1440 .	108 .	„	
1441 .	120 .	„	
1442 .	120 .	„	
1443 .	120 ,	„	
1444 .	120 .	„	
1445 .	120 .	„	
1446 .	120 .	„	

1).	2).	3).	4.)
1447 .	120 .	XV	
1448 .	120 .	„	
1449 .	132 .	„	
1450 .	132 .	„	
1451 .	132 .	„	
1452 .	132 .	„	
1453 .	132 .	„	
1454 .	132 .	„	
1455 .	132 .	„	
1456 .	132 .	„	
1457 .	144 .	„	

1).	2).	3).	4.)
1458 .	144 .	XV	
1459 .	144 .	„	
1460 .	144 .	„	
1461 .	144 .	„	
1462 .	144 .	„	
1463 .	144 .	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E., 1, 101, 114.
Abramescu N., 1, 91, 101, 108, 115.
Achard, 43.
Adam I. M., 32.
Adam D. R., 1.
Adamescu M., 1.
Alaci V., 1, 3, 12, 13, 20, 23, 24, 25, 35, 36, 37, 42, 43, 48, 49, 57, 60, 61, 66, 72, 73, 81, 82, 84, 85, 96, 97, 103, 108, 109, 116, 120, 121, 126, 128, 132, 137, 140, 144.
Alembert D., 27.
Amărăscu M., 23.
Amărăsteanu F. M., 11, 12, 21, 22, 32, 34, 35, 46, 47, 48, 56, 59, 60, 70, 71, 72, 80, 81, 82, 83, 84, 95, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 117, 118, 119, 130, 131, 132, 141, 142, 144.
Amăricâ Tibul, 12, 67, 69, 70, 71, 102, 141.
Anastasiadi I., 1.
Andrei J., 107.
Andriescu Cale B., 23, 70.
Andronescu Pl, 1, 42, 115.
Andrumachievici V., 95, 106, 107, 119, 141, 144
Angelescu A., 1.
Angelescu C., 137.
Angelescu N. Tr., 9, 20.
Angheluţa Th., 1, 91.
Antoniu V., 78.
Apostol Gh. N., 105, 117.
Apostol R., 23, 32, 59, 71, 95.
Apostol Gh. Val., 12, 23, 34, 59, 67, 68, 69, 71, 81, 102, 103.
Archimede, 27.
Ardelea R., 10.
Ardelean St., 1.
Arghir I., 1.
Arsene Al., 78.
Atanasiu D, 20, 32.
Avram I., 131, 142.

Bacaloglu, 101.
Bacârea A., 23, 32, 103.
Bădescu R, 126, 137.
Bădoiu M. I., 142.
Bădulescu D, 32.
Bădulescu V., 91.
Baidaff I. B., 7, 66, 78, 85, 91, 96.
Baire R., 114.
Bakony C, 1.
Balaban V., 85.
Balazs I., 1.
Balba C., 31.
Băleanu D., 59.
Balint A., 126.
Balint E., 20.
Bănăreşcu M., 1.
Banciu C., 32.
Banciu I, 1.
Barbilian D., 91.
Bardan C., 141.
Bărglăzan A., 1, 32, 42.
Baron C., 1.
Barral G. I., 78.
Bediceanu V. C., 23, 68, 70
Bejan C. Tr., 20.
Bejenaru Gh. V., 32, 80.
Beldie N. D., 9.
Berdan C., 20, 32.
Bernoulli D., 28.
Bernoulli J, 27.
Beşchea N., 55, 78.
Bessel, 91.
Birek V., 23, 47, 72, 81, 82, 102.
Blaschke W., 91.
Blaşian V., 1.
Bobârnac M., 1, 32.
Boborodea I. I., 32, 59, 105.
Bodea E. M., 115.
Boerescu G., 12.
Bogdan A. Cale, 35.
Boian P. N., 67.
Boiangiu I. Gh., 59, 81, 83.
Bolgiu O., 20.
Boitan P. N., 23, 67, 72, 83, 95, 103, 104, 105, 117.
Borel, 114, 137.
Botea N. G., 1, 9, 22, 31, 32, 44, 54, 91.
Botesu M., 31.
Botez M, 1.
Botez M, 1, 19, 54, 60, 72, 84, 90, 107, 120, 130.
Botezatu P. G., 12.
Bouligand G., 113, 114.
Bozdog, 137.
Brădăţeanu C. C., 20, 55.
Braiester O, 55.
Brătescu H. M., 32.
Bratu Gh, 1.
Breazu D., 1.
Brocard, 89.
Brounold Ch, 113.
Bucur N. V., 23, 36, 47, 59, 71, 80, 83, 84, 103, 105, 106, 107, 117, 131, 132.
Budeanu C., 19, 23, 36, 102, 116.
Budisteanu Al., 44.
Buicliu Gh., 1, 6, 7, 9, 12, 19, 24, 31, 36, 37, 42, 43, 44, 48, 54, 60, 78, 79, 84, 91, 94, 96, 108, 116, 119, 126, 127, 132, 134, 135, 144.
Bunescu D. A., 7, 114, 137.
Burghelea Cr., 105, 106, 117.
Burghelea V. St, 23, 68, 70, 95, 105, 141.
Bursan C., 54.
Buşilă I., 54, 101.
Buzincu I. I., 31, 36, 47, 59, 70, 71, 83, 103, 105, 107, 117, 131.

Călniceanu C., 1.
Călugăreanu D, 7, 54, 114.
Cândea C, 1.
Capota Gh., 32, 80, 81.
Capriel H, 54.
Caraman D. V., 32, 34, 35, 105, 107.
Caranfil N. 115.
Cârjă I. V., 23, 34, 35, 102.
Căsoeanu C., 12, 23, 34, 35, 67, 68, 70, 71, 102, 141.
Catona V., 1.
Cătrina C., 142.
Cătuneanu M. V., 68, 70, 141.
Cavaropol M., 83, 107.
Cavaropol N., 83.

1) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Cazanacli V. P., 12, 23, 32, 35, 36, 46, 47, 59, 67, 68, 69, 70, 71, 80, 81, 82, 83, 95, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 116, 117, 119, 120, 130, 131, 132, 142, 144.
Cehan G. A., 23, 32, 34, 35, 48, 67, 68, 70, 95, 96, 107, 131, 141.
Cesare A. E., 101.
Chievic A., 81.
Chiriac C. C., 12, 21, 23, 32, 67.
Chiriac I. C., 23, 34, 35, 56, 59, 102.
Chiriac I. S., 23, 32, 34, 59, 70, 80, 83, 102, 103, 107, 130, 131, 141.
Chiţulescu I. I. 91.
Chiu T., 70.
Cioc I. D., 47, 59, 72, 81, 83, 103, 105, 107, 141.
Ciorănescu I. C., 20.
Ciorănescu N., 91.
Ciucă I. I., 23, 36, 46, 71, 81, 82, 84, 95, 131.
Claudian V., 1, 32, 70, 79, 142.
Coadă I., 12.
Coandă I. V., 12, 23, 32, 35, 56.
Coca A., 1.
Cocorandu M., 32.
Codreanu I. Tr., 126.
Cojocaru C., 7, 19.
Cojocaru M., 23, 56.
Coman A., 1.
Comănescu A. 1, 9.
Comănescu Balteni Al. 55.
Comte A., 4, 5, 6, 16, 17, 26, 27, 28.
Constantin I. Gh. 70.
Constantinescu C. C., 107.
Constantinescu D. D., 9.
Constantinescu Gh., 1, 122, 132, 135, 137, 140.
Constantinescu Gh. Gh., 1, 19, 36, 42, 60, 66, 91, 120, 144.
Constantinescu M., 115.
Conta V., 114.
Contrea A., 1.
Cornescu E., 141.
Cornescu M., 71, 102.
Coşereanu I., 20, 32.
Cosma V. B., 32.
Coşniţă C., 43, 88.
Coşovliu Şt., 12.
Costăchescu D. C., 1.
Costăchescu V. C., 48.
Cotescu C., 101, 131, 132.
Craiu S. P., 107, 131.
Creangă V., 130.
Cristea G. Em., 82, 95, 96, 105, 107, 117, 131.
Cristescu I., 1.
Cristescu V., 32, 54, 85.
Cristodulo I., 1.
Cruţescu Trotuş, 105.
Cserveny I., 1.
Csevesz I., 32, 81, 102.
Csilcser E., 42, 43.

Damşescu A., 20.
Damsker D., 59, 70, 132.
Dănciulescu V. Gr., 78.
David Gh., 9.
David I., 78.
Deceanu Gh., 12, 34, 36, 68, 71, 72, 81, 83, 84, 95, 103, 104, 106, 107, 131.
Demetrescu Gh., 1.
Descartes, 16.
Diaconescu N., 1.
Diaconu Gh., 9.
Dimitriu At. I. 78.
Dirichlet, 115
Dobrescu D. P., 23, 35, 36, 46, 47, 59, 70, 71, 81, 82, 83, 84, 95, 103, 104, 105, 106, 107, 119, 130, 131, 142.
Dobru V., 59.
Dorneanu S. V., 20, 32.
Dospinoiu N., 20, 32.
Dostov, 3.
Dovidio M. I., 91, 101.
Drăghici St. C. 32, 80.
Dragomirescu T. I., 81, 83, 104, 117.
Dulămiţă Gr. I., 83, 107, 119, 131, 142.
Dumitraşcu A., 83, 107, 142.
Dumitraşcu R. R., 23, 32.
Dumitrescu Fl., 23, 71.
Dumitrescu M., 31.
Dumitrescu I. P., 105, 106.
Dumitrescu I. St., 23, 32, 35.
Dumitrescu Val, 105.
Dumitrescu A. V., 117.
Dumitriu I., 91.
Dumitriu-Dada I., 1.

Einstein, 114.
Enăşescu D. V., 23, 36, 47, 59, 70, 72, 83, 103, 107, 117, 131.
Enneper, 115.
Euler, 41, 82, 83, 91, 114, 126, 137, 138.

Ferencz I. T., 23, 32, 102.
Fericeanu St., 20.
Fermat, 76, 138.
Feuerbach, 4, 54, 121, 127.
Fibonacci, 31.
Flickstein I., 55.
Floareş C. Ad., 105, 117.
Florea C. A., 20, 32.
Florea C. T., 102.
Florescu T. C., 79.
Florescu G. H., 12, 23, 32, 35, 46, 47, 48, 59, 70, 71, 80, 81, 83, 94, 95, 103, 104, 105, 106, 107, 117, 119, 131.
Florescu M., 1.
Florescu L. V., 23, 32, 80, 105, 117, 130.
Focşeneanu I. M., 31, 126.
Frăţici I., 1.

Gabrielescu C. V., 20, 32, 43, 131.
Găjdan I., 31.
Galan I. I., 23, 32, 34, 35, 102.
Galé G. I., 66.
Galileu, 26, 27.
Galois E., 114.
Gataianţu V. B., 9.
Gaultier P., 114.
Gavrilescu N. C., 33, 35, 47, 59, 70, 71, 80, 82, 102, 105, 106, 107, 117, 130, 131, 142.
Geier A., 23.
Georgescu D., 1.
Georgescu Em., 33, 34, 72.
Georgescu-Val N. I., 20, 32.
Gergonne 43, 44, 90.
Gheorghe Val., 23.
Gheorghiu Em., 23, 35.
Gheorghiu N. Gh., 54, 137.
Gheorghiu S. Gh., 9.
Gheorghiu Th. Gh., 20, 29, 31, 32, 42, 91.
Gheorghiu Gh. L., 32.
Ghermănescu M., 1, 7, 91, 104, 108, 114.
Ghervescu V., 23, 35.
Ghica Al., 91.
Ghiocel V., 23, 48, 56.
Ghiţescu Sp., 1.
Giurgiuman A. C., 34.
Gloden A., 77, 113, 115, 126, 133
Gob A., 25.
Godeanu Ig V., 11, 12, 23, 33, 35, 36, 56, 83, 95, 103, 104, 107, 119, 130, 131, 141.
Gonzales M. O., 137.
Goormaghtigh R., 78, 98.
Grigore M. I., 59, 72, 83, 117.
Grigorescu A. V., 81, 95, 96, 103, 104, 105.
Grofşoreanu I. Gh., 9, 44, 55.
Grubenmann I. Gr., 9.
Grumăzesc I. M., 12, 23, 33, 34, 35, 47, 48, 70, 71, 72, 80, 84, 96, 102, 103, 105, 106, 107, 117, 119.
Grumbach A., 113.
Grossu R., 131.
Guţu I. Al., 126

Haret I. C., 12, 23, 34, 35, 67, 70, 71, 102.
Hompola I. T., 23, 33, 47, 59, 81, 83, 95, 102, 103, 104, 105, 117, 119, 130, 144.
Hortopan Gh. Gr., 72, 117.
Hristache V., 23.
Hristea H., 1.
Huber-Panu I., 115.
Huygens, 28.

Iacob C., 78, 115.
Iacobi, 139.
Iliescu B. D., 23, 34, 35, 70, 71, 102, 107, 141.
Iliescu St. V., 9.
Iliuţ S., 7, 31.
Ioachimescu G. A., 11, 91, 100.
Ioanovici A., 31, 126.
Ionescu Em. Argetoaia, 105.
Ionescu C., 7, 19.
Ionescu C. C., 79.
Ionescu D., 72, 183.
Ionescu D-tru, 12, 59, 70, 71, 81, 82, 83, 95, 96, 100, 104, 105, 106, 107, 116, 119, 131.
Ionescu V D., 19, 60, 91, 96, 101.
Ionescu C. Em., 11.
Ionescu I., 7, 19, 31, 42, 54, 78, 85, 91, 114, 126, 137, 142.
Ionescu Letiţia, 32.
Ionescu Paul, 44.

Ionescu I. P., 9.
Ionescu C. St., 59, 81, 105.
Ionescu-Bujor C., 1, 9, 19, 54, 55, 56, 84, 91, 96.
Ionescu-Ţiu D. C., 108, 120, 144.
Iorgulescu T., 1.
Iovănescu T. R., 79.
Irimia E., 7.
Isac C. D., 36, 47, 70, 83, 105, 117.
Isac C. Victor, 81, 117.
Ivănescu C., 10, 11, 13, 24, 31, 42, 56, 60, 72, 96, 106.

Janet G., 54
Jarda R., 35, 46. 72, 81, 95.
Jolly J., 7.
Jugănariu P., 101.

Kahn, 7.
Kant I., 5.
Kepler, 26, 27, 28.
Kertész P., 10.
Kikea Pr., 71.
Kovács E. Dr., 7, 19, 31.

Laboccetta L, 109.
Lagrange, 5, 6, 27, 28.
Laguerre, 42.
Lalescu Tr., 7, 31, 54, 115, 126, 137.
Lambrino Gr., 1.
Lascarache Gh., 131.
Lăţea P. C., 11, 56.
Laţiu V., 1.
Lazăr A., 103, 105, 117.
Lăzărescu F. St., 32.
Lăzărescu M. V., 9.
Lebesgue H, 114.
Lefter T. Gh., 33, 35.
Legendre, 138.
Leibnitz, 5, 91.
Lemaire I., 18.
Lemoine, 52.
Leonida D., 2, 115.
Lepădatu I. V., 20, 32.
Lewicky W., 137.
Lie Sophus, 114.
Linteş I., 2, 12, 19, 54, 91, 101, 130, 136, 137.
Liteanu Gh., 2.
Longchamps G. de, 3, 65.
Loziciu D I., 33, 36, 47, 96.
Lupan A., 2.
Lupescu G. C., 70, 72, 80, 82, 83, 102, 103, 105, 107, 119, 130, 131, 142, 144.

Mafteiu M. C., 23, 33.
Măgală I. Gh., 60, 70, 72, 82, 83, 95, 96, 103, 104, 105, 107, 117, 131.
Magheru I., 2.
Mănac D. V., 33, 80, 81.
Manafu V., 9.
Manea D., 12, 36, 81, 102.
Manheim, 90, 91.
Manicatide Al., 101.
Manolescu I. N., 32.
Manughevici C., 2.
Mărăndici N., 102.
Marconi G., 7.
Marcovici M. M., 10.
Mardan D., 2.
Mareş Gr, 44.
Mareş D. P., 103, 105.
Mărgărint Gr. Gh., 23, 34, 35, 70, 71, 102, 141.
Mărgineanu I., 20, 71, 84, 107, 120, 132.
Marin I., 23.
Marinescu M. I., 20, 32.
Marnea D., 23, 33, 47, 59, 70, 71, 103,
Marica P., 24, 47, 60, 67, 70, 72, 81, 83, 84, 95, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 119, 130, 131, 132, 142.
Marşieu T., 47.
Marteş Gr., 10, 12, 21, 59, 67, 72.
Măru D., 20.
Maşcaş G. P., 34, 47, 60, 72, 80, 81, 82, 103, 107, 130
Mateescu S., 2, 42.
Matei D. D., 120, 132
Matei D. V., 33, 72, 81, 117.
Măţieş V. I, 31, 36, 37, 38, 54, 61, 62, 63, 64, 67, 97, 101, 132.
Maupertius, 28.
Mazilu P., 23, 48, 56.
Mereuţă N. Em., 56, 60.
Mereuţă M., 11.
Mihăescu D. C., 32.
Mihai I. Gh., 107.
Mihăileanu N N., 32, 44, 56, 108, 120, 127.
Mihăilescu D. I., 107, 142.
Mihaiu E., 2, 43.
Mihalcea N. N., 12, 21, 24, 33, 34, 35, 46, 47, 59, 60, 70, 71, 72, 80, 81, 82, 83, 95, 96, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 117, 119, 130, 131, 141, 142, 144.
Mihalcea I. O., 24, 47, 81.
Mihoc G, 91.
Millea G. E., 11, 23, 24, 35, 70, 71, 82, 83, 95, 103, 106, 107, 131.
Miloia I., 2.
Milu I. N, 12, 33, 35, 46, 47, 48, 60, 70, 71, 81, 82, 83, 94, 95, 96, 103, 105, 105, 107, 117, 119, 130, 131, 141.
Mioc V., 2, 41, 43, 44.
Miron V., 24, 34.
Mitache I A., 107, 119, 131.
Miu M. I., 9, 55.
Mocanu V., 24, 95.
Modorcea O., 64, 65.
Moesner A., 78.
Moisă I. Gh, 142.
Moisovici St, 132.
Monge, 16, 114.
Morand M., 113, 114.
Moroz S., 105, 117.
Mosora N., 72, 81, 117.
Motoc D. M., 53, 127.
Mouchot, 19.
Munteanu V. L., 60, 81, 83, 107.
Murgu Marţian, 11, 24, 33, 34, 46, 47, 60, 70, 71, 81, 82, 84, 85, 95, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 117, 119, 130, 131, 141, 142.
Murgu N., 81.
Muscinschi G., 24.
Musta St., 33, 83, 95, 106.
Myller A., 31, 101.

Nadaşan St., 2.
Naneş Cornelia, 11, 36, 59, 81, 82, 83, 96, 107.
Naneş Gh., 2.
Nedelcu V. N, 103, 105, 106, 117.
Negrea A. L. M., 10, 11, 12, 22, 23, 24, 33, 34, 35, 36, 45, 47, 48, 60, 67, 68, 70, 71, 72, 81, 82, 83, 84, 95, 96, 102, 103, 104, 106, 107, 116, 117, 119, 130, 131, 142, 144.
Negreţu I. F., 32.
Neştianu Gh. Gh., 32.
Nestor G. D, 44
Neuberg I., 4, 25
Neumann 115.
Newton 5, 18, 26, 28, 46, 59, 113, 137.
Nichifor Gh., 2.
Nicoară D. C., 12, 24, 34, 59, 67, 69, 70, 71, 102, 141.
Nicolaescu N., 107, 142.
Nicolau A., 2.
Nicolau P., 2.
Nicolescu I., 32.
Niculescu Al. 20, 32, 115.
Niculescu Gh. 2, 54.
Niculescu I. I., 115.
Niculescu M., 2, 91.
Niewenglowski B., 13, 18,
Nistorescu D., 105.
Novacu V., 9.

Oakley O. C., 109, 110, 111, 113.
Onicescu O., 2.
Opran C. Roibăneşti 83, 103, 104, 105, 106, 117.
Orăşanu Gh. I, 82, 95.
Orăşeanu C., 2.
Orăşeanu Gr., 2.
Oţel Taţiana, 59.

Păcuraru P., 83.
Păduraru N., 24, 33, 35.
Pambucdjian C., 33, 35, 80, 131.
Pană P., 24, 33, 60, 80, 83, 105, 117.
Panait M., 24, 33, 35, 103, 117, 131.
Panaite N. Th., 37, 79.
Pantazi Al., 54.
Papazian E, 11, 23.
Pârăianu N., 20.
Paraschivescu M., 103, 105, 117.
Pârvu A., 9.
Pâslariu V., 11, 21, 127.
Patriciu V., 42.
Păun N. V, 24, 33, 34.
Percea V., 9, 20, 55.
Petre O. T., 12.
Petrescu A., 2.
Petrescu P. An., 24, 35, 60, 81.
Petrescu A. D., 9.
Petrescu C. O., 24, 33, 35.
Petrescu-Craioviţa An, 107, 131, 132, 142.
Petrovici D., 32.

Petruc T. E., 35.
Philips I., 79.
Pincu K., 32.
Pitagora, 91, 100.
Pitea P. D., 20.
Podariu A., 44.
Poinsot, 27.
Poncelet, 89, 90, 114.
Popa C. B., 103, 105, 117.
Popa B. I., 71, 72.
Popa N, 11, 12, 22, 23, 24, 33, 34, 35, 46, 47, 56, 60, 70, 71, 72, 80, 81, 82, 83, 84, 95, 96, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 117, 119, 130, 131, 141, 142, 144.
Popa-Câmpeanu I., 115.
Popea Gh. O., 20, 32.
Popeanu A, 20.
Popescu Adr., 10, 12, 35, 45, 48, 56, 68, 102, 144.
Popescu Th. Al., 101, 115.
Popescu N. C., 9, 55, 78, 94.
Popescu E., 2.
Popescu I., 2.
Popescu I. Gh., 78, 101.
Popescu N. Maria, 35, 47, 59, 71, 81, 82, 83, 94, 103, 105, 131, 141, 144.
Popescu Gh. N, 102.
Popescu D. St, 79.
Popescu-Greaca Vlad, 12, 24, 34, 35, 69, 70, 71, 102, 141.
Popleşeanu Gh I., 33, 35, 102.
Popovici A., 32.
Popovici C. C., 20, 32.
Popovici P. D., 32.
Popovici Th. I., 9, 20, 32, 55.
Popovici L., 33.
Popoviciu I. G., 94, 107, 130.
Popoviciu T., 20, 32, 49, 73, 91.
Poreki B., 23.
Porumbescu D., 23.
Postelnicescu C. M., 24, 33, 36, 48, 60, 70, 71, 72, 81, 82, 83, 95, 96, 102, 106, 107, 119, 130, 131, 141.
Predoescu I. M., 7, 11, 12, 22, 23, 34, 35, 56, 59, 60, 70, 71, 72, 80, 82, 95, 96, 102, 103, 116, 130.
Predoescu M. Tr., 11, 21, 46.
Pringsheim, 137.
Protopopescu I., 2, 115.
Pupăzan Gh. C, 24, 96, 106, 131.
Pupăzan V., 95, 105.
Purcariu I., 2.

Racliş N. R., 2, 7, 31, 54, 91, 115.
Racoţeanu C., 33.
Rădulescu Gh. O., 33, 80, 81, 105.
Rădulescu P. S., 20.
Răduleţ B. R., 20, 42.
Râmbu Gh. A., 12, 70, 71.
Râmniceanu I. G., 79.
Râmniceanu I. Gr., 10.
Răuţ C. C., 20.
Rennert B., 104, 117.
Rennert S., 105.
Rezeanu P. M., 56.
Rizescu I., 36.
Roco M., 85.
Roibănescu C., 2.
Roman I. I, 9, 79.
Roman I. N., 24, 33, 68, 70, 72, 82, 95, 96, 103, 104, 105, 106, 107, 117, 119, 131.
Roman I. V, 83.
Rosenberg I., 130.
Roşu A. A., 9, 31, 126.
Rotaru Gh. Gh, 95, 107, 131.
Rottenberg A, 82.
Rovenţa O, 83.
Rumceanu N. C, 131.
Russu I. E., 105, 106, 115.

Şabac Gh. I., 23, 35, 95, 116.
Sâmbotin Gh., 22, 24, 33, 35, 56, 59.
Săndulescu I. I., 116.
Santo F. G, 127.
Sarrus, 58.
Sassu V. I., 79.
Sauciuc L., 2.
Savin C. I., 9, 24, 46, 79, 84, 127.
Savin Maria, 103, 130, 131.
Savin I. R., 107, 121.
Săvulescu Sp., 24, 33, 34, 47, 68, 69, 80, 81, 103, 106.
Schileru C. I., 2, 19, 31, 48, 120, 126.
Schumacher È., 20.
Scodrano A, 20, 32.
Secară Gh. A., 105, 106, 117.
Secară St. A, 106.
Secară M D, 96, 107, 130, 131.
Secăroiu D., 10, 11.
Sechel T. M., 72, 81.
Şedlovschi G A., 24, 33, 34, 35.
Segărceanu M. M., 11, 102, 107, 131.
Şerbănescu A M., 33, 102, 107, 131.
Sergescu P., 2, 4, 42, 91, 113, 114.
Severineanu C, 2.
Silion Gh. I., 9, 20, 32, 55.
Simionescu Gh. D., 2, 9, 12, 31, 91.
Smighelschi O., 2.
Söderblom, 111, 112.
Şoimulescu I., 79.
Solomon N., 20.
Sonto B. I, 7.
Sprinceană C. Gh., 79.
Stambuleanu A., 2.
Stan I A., 2, 24.
Stăncescu C, 2.
Stănciulescu Gh. Brăila, 24, 32, 33, 83, 95, 96, 103, 106, 117.
Stănculescu I. C, 20.
Stănescu M. Em., 11.
Stantzel E., 2.
Steblea St., 20.
Stefănescu Em, 9, 55.
Ştefănescu D. N., 33, 83, 95, 102, 103, 104, 106, 119, 130, 131, 142.
Ştefăneseu S. Saba, 115.
Stoica N. D., 46, 60, 72, 84, 107, 131.
Stoica P. I., 102, 131.
Stoicescu L., 2.
Stoicescu M., 2.
Stoicecsu T., 91.
Stratulat I., 20.
Strohal R., 24, 33, 102.
Suhov I., 42.
Süli M., 43, 56.
Surmei I M., 106, 117.
Şuşală Gh., 11, 23, 56.

Taboury M., 113.
Tacchella G, 109.
Tănăsescu A. T., 115.
Tanasiciuc V. C., 24, 35, 83, 102, 103, 107, 131.
Tannery J., 120.
Tanovici V. C., 9.
Tărăbuţă C. P., 20, 32, 55.
Tarălungă D., 24, 33, 35, 36, 47, 71, 72, 81, 84, 95, 103, 104, 107, 130, 131.
Taraş V., 9.
Tarină N., 62, 63, 65.
Tauber A., 32.
Taylor, 6.
Teodorescu C., 2, 3, 13, 25, 37, 42, 49, 51, 61, 73, 78, 85, 94, 97, 109, 121.
Teodorescu M. D, 55, 115.
Teodorescu N., 10, 43
Teodosiu A., 2.
Teofan I, 107, 142.
Terpu A T., 81.
Thébault V., 3, 6, 18, 19, 24, 25, 26, 29, 36, 42, 48, 52 53, 54, 66, 72, 78, 84, 90, 94, 96, 100, 101, 108, 116, 121, 122, 127, 144.
Theodoridis V. T., 20.
Theohari Ch. Maria 91.
Thiry R., 115.
Thompson, 114.
Thompon, 101.
Tică P. M. Gall, 10, 12, 22, 56, 95, 96, 102, 107, 127, 130.
Tighiliu G. R, 24, 33, 34, 35.
Tino O., 2, 42, 43, 54, 91, 108.
Ţiţeica Gh., 7, 42, 54, 91, 115, 119.
Ţiţeica I. I., 24, 48, 60, 72, 81, 83, 95, 96, 103, 104, 106, 107, 119, 130, 131, 132.
Toma N. N., 33, 72, 80, 81, 117.
Torricelli, 28.
Trăsnitu N., 12, 24, 34, 35, 67, 70, 71, 102, 141.
Turpain A., 113.

Udrisky Tr., 20, 32.

Vâlcovici V., 2.
Vancu I., 21, 23.
Vandermonde, 76.
Vasilescu A. Gh, 24, 33, 35, 102, 105, 106, 131.
Vasilescu M., 20.
Vasilescu C. N, 12, 24, 35, 67, 70, 71, 141.
Vasilescu-Jiu C. N., 34, 102.
Vasilescu-Karpen N., 115.
Vasiliu A. C., 34, 35, 102.
Vasiliu Gh Gh., 9.
Vasiliu L. Gh., 2, 10, 56, 126.
Vasiliu C. I., 9, 20.
Vasiliu K., 24.
Vasiliu I. M., 12, 24, 34, 35, 67, 70, 71, 102, 141.
Vasiliu M. Ol., 107, 131.
Verenca S., 12, 24, 34, 35, 67, 70, 71, 102, 141.

Verjinski N, 107, 131.
Veşcan T. 115.
Viciu A. A., 157.
Vignaux G., 114.
Villat H., 115.
Vişa E, 12, 60, 72, 97, 120, 131.
Vlad I. V, 2, 43.
Vlad I. M., 24, 81.
Vonica C. I, 130.
Vuibert H., 77, 100.
Vusatiuc D. M., 95, 131.

Weinstein I., 11.
Weiss L., 20, 32.
Weismann Lipa, 24.

Zăgănescu I., 2.
Zaharescu I., 11, 21.
Zaharia O. N., 4, 16, 26, 114, 126, 137, 144.
Zapan Gr., 2, 57, 91, 101.
Zgârcea Gh., 107, 131.
Zotta I., 85.

VIII. ERATA.

1	*) Problema 1348	124**)	Vol. XIV.
96	„ 557	78	„ XV.
96	„ 557	78	„ „
96	„ 557	78	„ „
120	Articolul: Probleme din vechime	73	„ I.
120	Articolul: Restul împărţirei numerelor întregi	98	„ XV.
120	„ „ „ „ „	98	„ „
120	„ „ „ „ „	99	„ „

*) Pagina la care s'a publicat erata sau rectificarea. **) Pagina la care trebue făcută rectificarea.

INFORMAŢIUNI

Rugăm pe corespondenţii nostrii, a ne trimete de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T.“ pe anul XVI, care începe la 15 Martie 1936.

La Redacţiunea „Revistei Matematice din Timişoara“ se primesc abonamente pentru:

BOLETIN MATEMATICO

ANUL AL IX-LEA

care începe în Martie 1935.

Costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei.

Această Revistă se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Răspundem pe această cale, la toţi acei corespondenţi, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datoreşte sau faptului că acele soluţiuni au sosit întârziate, sau au fost greşite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate, în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenţii noştrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor şi camarazilor lor.

Se găsesc broşate colecţiile R. M. T. din anii II — XIV, cu preţul de lei 120 volumul şi se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XV-lea al revistei, care începe cu numărul 1 la 15 Martie, costă 100 (UNA SUTA LEI) şi se trimite prin contul CEC No. 85208, sau prin mandat postal pe adresa: Prof. C. TEODORESCU, rectorul Şcoalei Politechnice, Timişoara.

BIBLIOTECA „ASTRA“ SIBIU

REVISTA M
MIŞOARA — VOL. XV.

5 lei